Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вологодская государственная
молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра энергетических средств и технического сервиса

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Часть 2. Кинематика

Вологда – Молочное
2022

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Вологодская государственная
молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра энергетических средств и технического сервиса

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Часть 2. Кинематика

Вологда – Молочное
2022

УДК 531(07)
ББК 22.2(я73)
Т338

Составители:
старший преподаватель кафедры
энергетических средств и технического сервиса
С.В. Гайдидей

Рецензенты –
доцент кафедры технические системы в агробизнесе
Н.Н. Кузнецов,
доцент кафедры технологического оборудования
Ю.В. Виноградова

Т338 Теоретическая механика. Руководство к решению задач. Часть 2. Кинематика: Учебное пособие / Сост. С.В. Гайдидей. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2022. – 119 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

35.03.06 – Агроинженерия,
15.03.02 – Технологические машины и оборудование,
27.03.01 – Стандартизация и метрология,
35.03.02 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.

Руководство будет способствовать лучшему усвоению студентами законов механики, овладению навыками инженерных расчетов, закреплению пройденного теоретического материала.

Руководство рассмотрено на заседании методической комиссии инженерного факультета и рекомендован к изданию (протокол №2 от 14 октября 2022 г.).

УДК 531(07)
ББК 22.2(я73)

ВВЕДЕНИЕ

Кинематика – это второй раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика необходима как для изучения третьего раздела теоретической механики – динамики, так и для изучения последующих дисциплин («Детали машин и основы конструирования», «Теория механизмов и машин» и др.).

После изучения кинематики студент должен:

- *знать* основные понятия и теоремы кинематики;
- *уметь* устанавливать закон движения точки или тела относительно данной системы отсчета;
- *уметь* определять основные кинематические характеристики движения точки (тела);
- *владеть* методами определения основных кинематичесих характеристик в случае сложного движения точки (тела);
- *владеть* методами расчета кинематических характеристик зубчатых передач.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств», а также для студентов, обучающихся по другим инженерным направлениям подготовки.

В начале каждой темы «Руководства» предлагается краткое изложение теоретических основ для решения задач. Теория излагается в наиболее доступной для студента форме; рассматривается порядок решения типовых задач, методы нахождения определенных величин, и т.д. Для некоторых разделов предлагаются алгоритмы решения, позволяющие последовательно решить типовую задачу.

Для получения навыков решения задач студент должен вначале попробовать решить задачу самостоятельно, а лишь затем свериться с решением.

В ходе решения задач приводятся подробные математические вычисления с указанием необходимых формул, что избавляет студента от необходимости использовать специальную литературу.

Задачи, как правило, сопровождаются рисунками. Так, например, в задачах кинематики приводятся отдельные рисунки для вычисления разных кинематических характеристик (скорости, ускорения и т.д.).

Тем не менее, предлагаемое пособие не избавляет студента от необходимости изучения теоретического материала по курсу дисциплины. Изучение руководства также предполагает, что студентом ранее были успешно освоены основы курсы дисциплин «Математика» и «Физика».

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. Координатный способ задания движения точки[1].

Движение точки *M* задается зависимостями ее координат (рис. 1.1) от времени *t*:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t). \qquad (1.1)$$

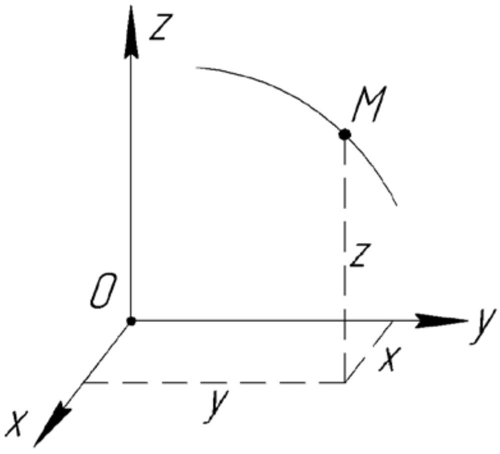

Рис. 1.1

Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y$$

или

$$\upsilon_x = \dot{x},\ \upsilon_y$$

где точка над буквой представляет собой символ дифференцирования по времени.

Модуль скорости точки равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 +$$

а направляющие косинусы (т.е. косинусы углов, которые вектор $\bar{\upsilon}$ скорости точки образует с координатными осями) составляют:

$$\cos(\bar{\upsilon}, x) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon},\ \cos(\bar{\upsilon}, y) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon},\ \cos(\bar{\upsilon}, z) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}. \qquad (1.5)$$

Направлен вектор $\bar{\upsilon}$ в данный момент времени *t* по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Скорость измеряется в *м/с*.

Проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (1.6)$$

или

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}. \qquad (1.7)$$

Модуль ускорения точки равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (1.8)$$

а направляющие косинусы составляют:

---

[1] Как правило, в задачах движение точки задается координатным или естественным способом. Поэтому векторный способ задания движения точки в данном пособии не рассматривается.

$$\cos\left(\overline{a},x\right)=\frac{a_x}{a},\ \cos\left(\overline{a},y\right)=\frac{a_y}{a},\ \cos\left(a,z\right)=\frac{a_z}{a}. \qquad (1.9)$$

Вектор $\overline{a}$ в данный момент времени t находится в соприкасающейся плоскости[1] и направлен в сторону вогнутости траектории. В случае если траектория точки представляет собой плоскую кривую, то вектор $\overline{a}$ будет находиться в плоскости движения точки, если траектория точки – прямая, то вектор $\overline{a}$ будет направлен вдоль этой прямой.

Ускорение измеряется в *м/с*^{2}.

2. Естественный способ задания движения точки.

Необходимо задать (рис. 1.2, *а*):

1) траекторию точки *M*;

2) начало отсчета – точку *O*;

3) положительное (+) и отрицательное (–) направления движения;

4) закон движения точи вдоль траектории в виде $s=f\left(t\right)$.

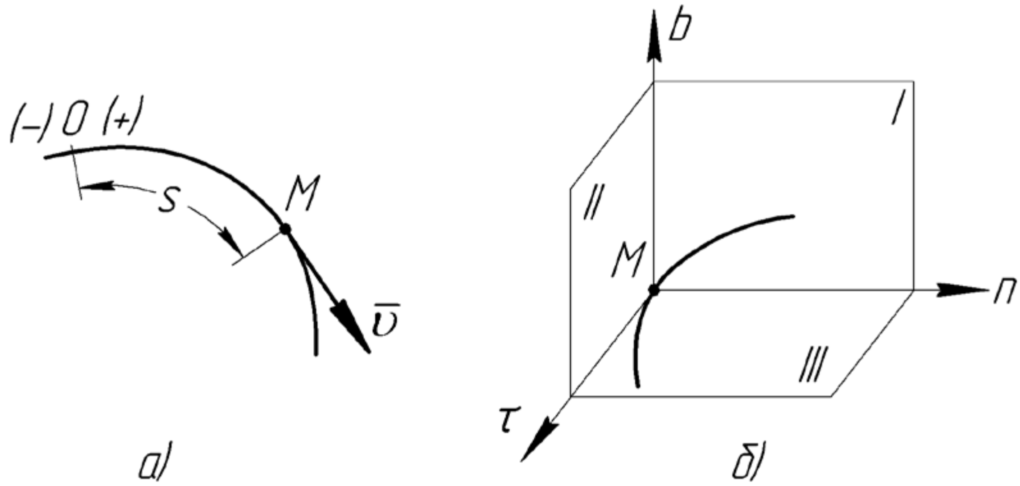

Рис. 1.2

Числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от криволинейной координаты s этой точки по времени:

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}, \qquad (1.10)$$

или

$$\upsilon=\dot{s}. \qquad (1.11)$$

Вектор $\overline{\upsilon}$ в данный момент времени t направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения, если $\upsilon>0$ (рис. 1.2, *а*), и против движения, если $\upsilon<0$.

Естественные оси (касательная τ, главная нормаль n и бинормаль b)

---

[1] Соприкасающейся называется плоскость, проходящая через касательную к траектории в точке ***M*** и бесконечно близкую к ней точку $\boldsymbol{M_1}$ траектории.

являются результатом пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 1.2, *б*), перемещающихся вместе с точкой *M*: нормальной (*I*), спрямляющей (*II*) и соприкасающейся (*III*).

Проекция ускорения точки на касательную (касательное ускорение) равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от криволинейной координаты s по времени:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad \text{или} \quad a_\tau = \dot{\upsilon} = \ddot{s}. \tag{1.12}$$

Проекция ускорения на главную нормаль (нормальное ускорение) равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точки кривой:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}. \tag{1.13}$$

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю:

$$a_b = 0. \tag{1.14}$$

Модуль ускорения точки равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.15}$$

Вектор $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории и совпадает с направлением вектора скорости в случае, если $a_\tau > 0$ (рис. 1.3, *а*), и противоположен вектору $\overline{\upsilon}$, если $a_\tau < 0$ (рис. 1.3, *б*). Вектор $\overline{a}_n$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории перпендикулярно вектору $\overline{a}_\tau$.

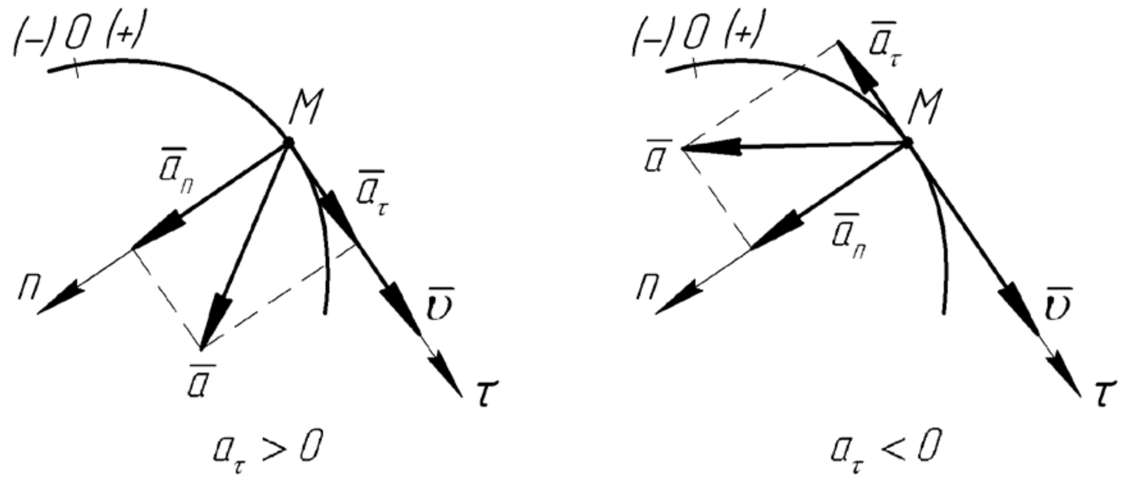

Рис. 1.3

Проекции вектора ускорения на координатные и на естественные оси связаны между собой следующими зависимостями:

$$a_\tau = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}, \quad a_n = \frac{\upsilon_x a_y - \upsilon_y a_x}{\upsilon}. \tag{1.16}$$

Равнопеременное движение точки – движение, при котором касательное ускорение точки остается все время постоянным:

$$a_\tau = const\,. \tag{1.17}$$

Закон изменения скорости при равнопеременном движении точки:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t\,, \tag{1.18}$$

где υ_0 – начальная скорость точки, м/с.

Закон равнопеременного движения точки:

$$s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}\,, \tag{1.19}$$

где s_0 – начальное перемещение точки, м; как правило, в задачах $s_0 = 0$.

Задача 1.1. Ролик радиуса r катится без скольжения по неподвижному кольцу радиуса $R = 2r$ с постоянной скоростью центра ролика υ_0 (рис. 1.4). Определить уравнения движения и траекторию точки A стержня $AB = 2r$, который неизменно скреплен с роликом и расположен вдоль радиуса ролика. В начальный момент при $t = 0$ ролик занимает нижнее положение.

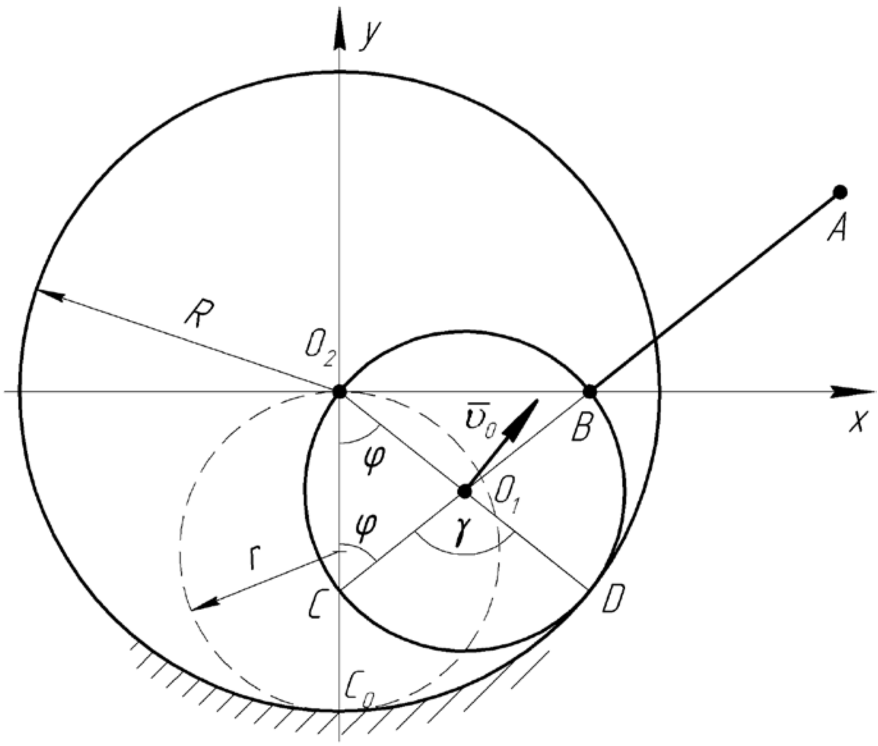

Рис. 1.4

Решение:

За время t ролик повернется на некоторый угол φ. Вследствие того, что качение ролика происходит без скольжения, то длины дуг C_0D и CD равны. Тогда $\gamma r = \varphi R$, откуда $\gamma = 2\varphi$.

Т.к. ΔO_1O_2C – равнобедренный, то, $\angle CO_2O_1 = \angle O_2CO_1 = \varphi$.

Тогда координаты точки A определятся:

$$x_A = O_1O_2 \sin\varphi + O_1A \sin\varphi, \quad y_A = AB\cos\varphi, \tag{1.20}$$

или

$$x_A = 4r\sin\varphi,\ y_A = 2r\cos\varphi, \tag{1.21}$$

где $\varphi = \upsilon_0 t/r$.

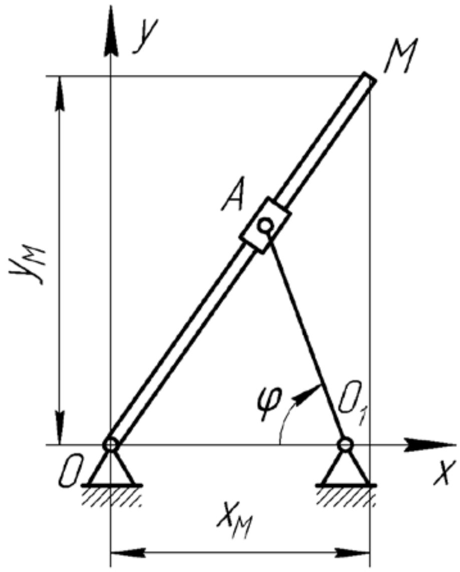

Рис. 1.5

Чтобы найти траекторию точки A возведем в квадрат обе части уравнений (1.21) и сложим. Получим:

$$\frac{x_A^2}{16r^2} +$$

Таким образом, траекторией является эллипс с полуосями $a = 4r$ и $b = 2r$.

Задача 1.2. Кулиса OM длиной l приводится в движение кривошипом O_1A, вращающимся по закону $\varphi = kt^2$ (рис. 1.5). Составить уравнение движения точки M кулисы, если $O_1O = O_1A$.

Решение:

Треугольник OO_1A – равнобедренный, значит:

$$\angle AOO_1 = \angle OAO_1 = \frac{180° - \varphi}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}. \tag{1.23}$$

Тогда координаты точки M будут:

$$x_M = l\cos\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right), \quad y_M = l\sin\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{1.24}$$

или

$$x_M = l\sin\frac{\varphi}{2}, \quad y_M = l\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{1.25}$$

Подставляя в уравнения текущее значение угла поворота, получим уравнения движения точки M:

$$x_M = l\sin\frac{kt^2}{2}, \quad y_M = l\cos\frac{kt^2}{2}. \tag{1.26}$$

Задача 1.3. Ползун A совершает гармонические колебания по закону $L = a\sin\omega t$, а стержень $AB = l$ вращается по закону $\varphi = \omega t$ (рис. 1.6). Определить траекторию точки B.

Решение:

Найдем уравнения движения точки:

$$x_B = L + l\sin\varphi = (a + l)\sin\omega t, \quad y_B = l\cos\omega t. \tag{1.27}$$

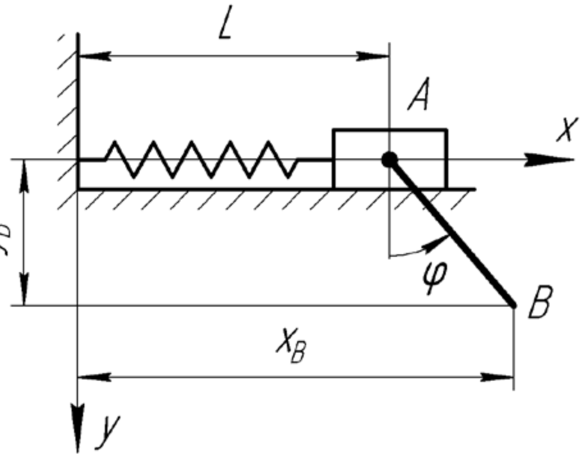

Рис. 1.6

Для определения траектории движения точки *B* из полученных уравнений исключим параметр *t*. Для этого из этих уравнений найдем

$$\sin\omega t = \frac{x_B}{a+l}, \quad \cos\omega t = \frac{y_B}{l}. \tag{1.28}$$

возведем обе части этих уравнений в квадрат и сложим:

$$\frac{x_B^2}{(a+l)^2} + \frac{y_B^2}{l^2} = 1. \tag{1.29}$$

Таким образом, траекторией точки является эллипс с полуосями $(a+l)$ и *l*.

Задача 1.4. В кривошипно-шатунном механизме кривошип *OA* вращается по закону $\varphi = \pi t$ (рис. 1.7). Длина кривошипа $OA = 0{,}2\ м$, длина шатуна $AB = 1\ м$.

Определить уравнения движения середины шатуна – точки *M*.

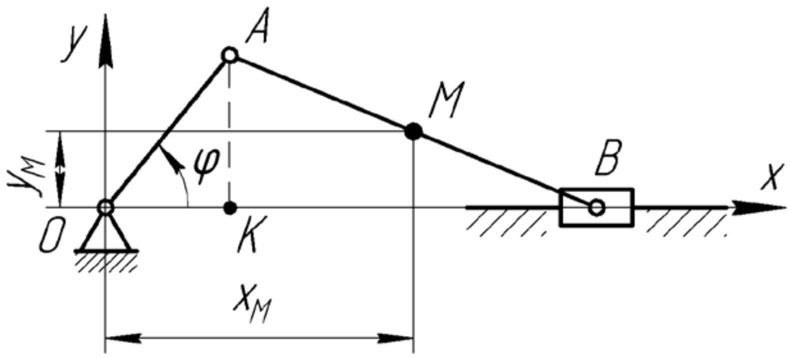

Рис. 1.7

Решение:

Т.к. точка *M* является серединой шатуна *AB*, то координаты точки *M* будут:

$$x_M = OK + \frac{KB}{2}, \quad y_M = \frac{AK}{2}. \tag{1.30}$$

Из треугольника OAK найдем:

$$OK = OA\cos\varphi = 0,2\cos\pi t\,, \quad AK = OA\sin\varphi = 0,2\sin\pi t\,. \tag{1.31}$$

В треугольнике ABK по теореме Пифагора:

$$KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{1-\left(0,2\sin\pi t\right)^2}\,. \tag{1.32}$$

Тогда уравнения движения точки M примут вид (x_M и y_M – в метрах):

$$x_M = 0,2\cos\pi t + \frac{\sqrt{1-\left(0,2\sin\pi t\right)^2}}{2} =$$

$$= 0,2\cos\pi t + \sqrt{0,25 - 0,01\sin^2\pi t}\,, \tag{1.33}$$

$$y_M = 0,1\sin\pi t\,. \tag{1.34}$$

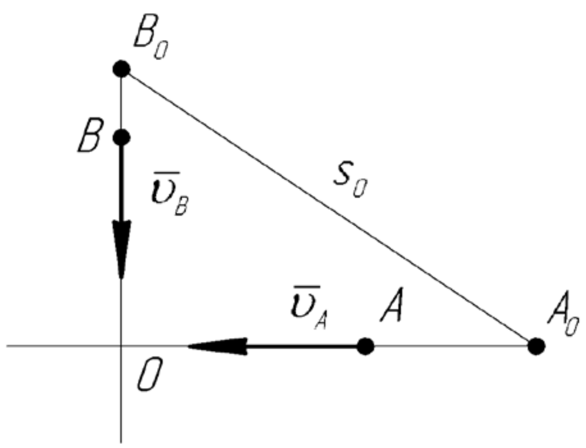

Рис. 1.8

Задача 1.5. Два автомобиля A и B двигаются к перекрестку O по двум дорогам с постоянными скоростями $\upsilon_A = 40$ *км/ч* и $\upsilon_B = 25$ *км/ч* (рис. 1.8). Дороги пересекаются под прямым углом. В начале движения автомобили находились соответственно в точках A_0 и B_0, которые находятся от перекрестка на следующих расстояниях: $OA_0 = 15$ *км*, $OB_0 = 10$ *км*. Определить через какое время t_1 расстояние между автомобилями будет минимальным, а также время t_2, когда расстояние между ними будет равным начальному, т.е. $s_0 = A_0B_0$.

Решение:

По теореме Пифагора найдем расстояние между автомобилями:

$$s^2 = OA^2 + OB^2 = \left(OA_0 - \upsilon_A\cdot t\right)^2 + \left(OB_0 - \upsilon_B\cdot t\right)^2, \tag{1.35}$$

или

$$s = \sqrt{\left(OA_0 - \upsilon_A\cdot t\right)^2 + \left(OB_0 - \upsilon_B\cdot t\right)^2}\,. \tag{1.36}$$

Чтобы найти время t_1, когда расстояние примет минимальное значение $s_{\min}$ продифференцируем уравнение (1.36) по времени и приравняем его к нулю:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\left(OA_0 - \upsilon_A\cdot t\right)\left(-\upsilon_A\right) + 2\left(OB_0 - \upsilon_B\cdot t\right)\left(-\upsilon_B\right)}{2\sqrt{\left(OA_0 - \upsilon_A\cdot t\right)^2 + \left(OB_0 - \upsilon_B\cdot t\right)^2}} = 0\,, \tag{1.37}$$

откуда

$$OA_0 \cdot \upsilon_A - \upsilon_A^2 \cdot t + OB_0 \cdot \upsilon_B - \upsilon_B^2 \cdot t = 0. \qquad (1.38)$$

Подставляя сюда данные задачи и $t = t_1$, найдем:

$$15 \cdot 40 - 40^2 \cdot t_1 + 10 \cdot 25 - 25^2 \cdot t_1 = 0, \qquad (1.39)$$

$$t_1 = 0,382 \text{ ч} \approx 23 \text{ мин}. \qquad (1.40)$$

Определим $s_{\min}$ и положение автомобилей в это время:

$$s_{\min} = \sqrt{(15 - 40 \cdot 0,382)^2 + (10 - 25 \cdot 0,382)^2} = 0,53 \text{ км}, \qquad (1.41)$$

$$OA_1 = OA_0 - \upsilon_A \cdot t_1 = 15 - 40 \cdot 0,382 = -0,28 \text{ км}, \qquad (1.42)$$

$$OB_1 = OB_0 - \upsilon_B \cdot t_1 = 10 - 25 \cdot 0,382 = 0,45 \text{ км}. \qquad (1.43)$$

Найдем расстояние между автомобилями перед началом движения:

$$s_0 = \sqrt{OA_0^2 + OB_0^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} = 18,03 \text{ км}. \qquad (1.44)$$

Найдем время t_2 после начала движения автомобилей, когда расстояние между ними будет снова равно s_0. Для этого в уравнение (1.36) подставим $s = s_0$, $t = t_2$:

$$s_0 = \sqrt{(OA_0 - \upsilon_A \cdot t_2)^2 + (OB_0 - \upsilon_B \cdot t_2)^2}. \qquad (1.45)$$

Подставим сюда числовые значения

$$18,03^2 = (15 - 40 \cdot t_2)^2 + (10 - 25 \cdot t_2)^2, \qquad (1.46)$$

и найдем время t_2:

$$325 = 225 - 1200 t_2 + 1600 t_2^2 + 100 - 500 t_2 + 625 t_2^2, \qquad (1.47)$$

$$(2225 t_2 - 1700) t_2 = 0, \qquad (1.48)$$

$$(t_2)_1 = 0 \text{ (в момент начала движения)}, \qquad (1.49)$$

$$(t_2)_2 = 0,764 \text{ ч} \approx 46 \text{ мин}. \qquad (1.50)$$

Положение автомобилей в этот момент:

$$OA_2 = OA_0 - \upsilon_A \cdot t_2 = 15 - 40 \cdot 0,764 = -15,56 \text{ км}, \qquad (1.51)$$

$$OB_2 = OB_0 - \upsilon_B \cdot t_2 = 10 - 25 \cdot 0,764 = -9,1 \text{ км}. \qquad (1.52)$$

Задача 1.6. Из пункта *A*, находящегося на берегу реки, нужно попасть в пункт *B*, отстоящий от берега на расстоянии 9 *км* (рис. 1.9). В каком пункте *C* нужно высадиться на берег с лодки, идущей со скоростью $\upsilon_1 = 5,4$ *км/ч*, чтобы в кратчайшее время прибыть пешком в пункт *B*, если средняя скорость ходьбы $\upsilon_2 = 4,32$ *км/ч*, а расстояние $AB = 41$ *км*.

Решение:

Время движения из пункта *A* в пункт *B* составит:

$$t = t_1 + t_2, \qquad (1.53)$$

где $t_1 = AC/\upsilon_1$, $t_2 = CB/\upsilon_2$ – время движения соответственно на участках *AC* и *CB*.

Т.к. положение точки *C* неизвестно, обозначим $AC = x$.

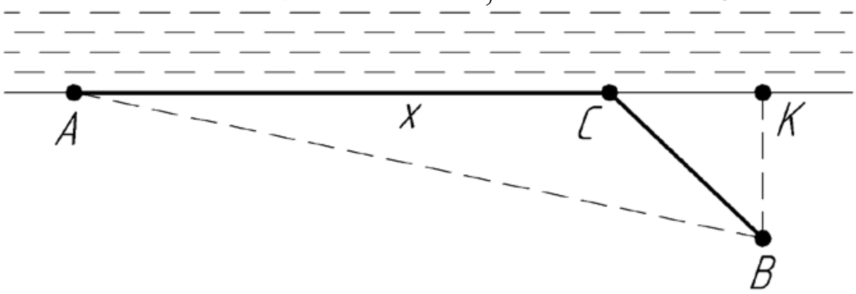

Рис. 1.9

Расстояние *CB* найдем по теореме Пифагора:

$$CB = \sqrt{CK^2 + KB^2}, \qquad (1.54)$$

где $CK = AK - x$.

В треугольнике *ABK* расстояние *AK* равно:

$$AK = \sqrt{AB^2 - KB^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40\ км. \qquad (1.55)$$

Тогда:

$$CK = 40 - x, \qquad (1.56)$$

$$CB = \sqrt{(40 - x)^2 + 9^2} = \sqrt{1681 - 80x + x^2}. \qquad (1.57)$$

Общее время движения:

$$t = \frac{x}{5,4} + \frac{\sqrt{1681 - 80x + x^2}}{4,32}. \qquad (1.58)$$

Чтобы найти минимальное время прибытия в пункт *B*, продифференцируем полученное уравнение по *x* и приравняем к нулю:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{5,4} + \frac{1}{4,32} \cdot \frac{-80 + 2x}{2 \cdot \sqrt{1681 - 80x + x^2}} = 0. \qquad (1.59)$$

Преобразуем:

$$4,32 \cdot \sqrt{1681 - 80x + x^2} = 5,4 \cdot (40 - x), \qquad (1.60)$$

$$4,32^2 \cdot \left(1681 - 80x + x^2\right) = 5,4^2 \cdot (40 - x)^2, \qquad (1.61)$$

$$31371,5 - 1493x + 18,7x^2 = 46656 - 2332,8x + 29,2x^2. \qquad (1.62)$$

В результате получим квадратное уравнение:

$$10,5x^2 - 839,8x + 15284,5 = 0, \qquad (1.63)$$

корни которого будут равны:

$$x = \frac{839,8 \pm \sqrt{(-839,8)^2 - 4 \cdot 10,5 \cdot 15284,5}}{2 \cdot 10,5}, \qquad (1.64)$$

$$x_1 = \frac{839,8 + 251,6}{21} = 51,97\ км, \qquad (1.65)$$

$$x_2 = \frac{839,8 - 251,6}{21} = 28\ км. \qquad (1.66)$$

Первый корень физического смысла не имеет, т.к. он больше расстояния *AK*. Таким образом, чтобы затратить минимальное время, человек должен проплыть на лодке 28 *км*.

Задача 1.7. Человеку необходимо добраться в кратчайшее время из пункта *A*, находящегося на берегу, на остров *B*, который находится на расстоянии *17,3 км* от берега (рис. 1.10). В каком месте *C* человек должен пересесть с автомобиля на катер, если скорость автомобиля на участке *AC* $\upsilon_1 = 72\ км/ч$, а скорость катера *AC* $\upsilon_2 = 36\ км/ч$.

Рис. 1.10

Решение:

Обозначим $AD = l$, $CD = x$, тогда:

$$AC = l - x, \tag{1.67}$$

$$BC = \sqrt{x^2 + 17,3^2} = \sqrt{x^2 + 299,3}. \tag{1.68}$$

Общее время движения из точки *A* в *B* равно:

$$t = \frac{AC}{\upsilon_1} + \frac{BC}{\upsilon_2} = \frac{l - x}{72} + \frac{\sqrt{x^2 + 299,3}}{36}. \tag{1.69}$$

Продифференцируем полученное уравнение по *x* и приравняем к нулю:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{72} + \frac{1}{36} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 299,3}} = 0. \tag{1.70}$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$2x = \sqrt{x^2 + 299,3}, \tag{1.71}$$

$$3x^2 = 299,3, \tag{1.72}$$

откуда:

$$x = \pm\sqrt{\frac{299,3}{3}}. \tag{1.73}$$

Т.к. *x* – положительная величина (иначе человеку придется проехать лишнее расстояние), то

$$x = 9,98 \approx 10\ км. \tag{1.74}$$

Задача 1.8. Уравнения движения точки *M* $x = 3t$, $y = 9t^2 - 4$ (*x*, *y* – в сантиметрах). Установить траекторию движения точки и найти положение точки на траектории в момент времени $t_1 = 1/3\ c$. Найти для этого положения точки ее скорость, полное, касательное, нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение:

Чтобы определить уравнение траектории точки *M*, исключим из уравнений движения точки параметр *t*. Для этого из первого заданного уравнения выразим $t = x/3$ и подставим во второе:

$$y = x^2 - 4. \qquad (1.75)$$

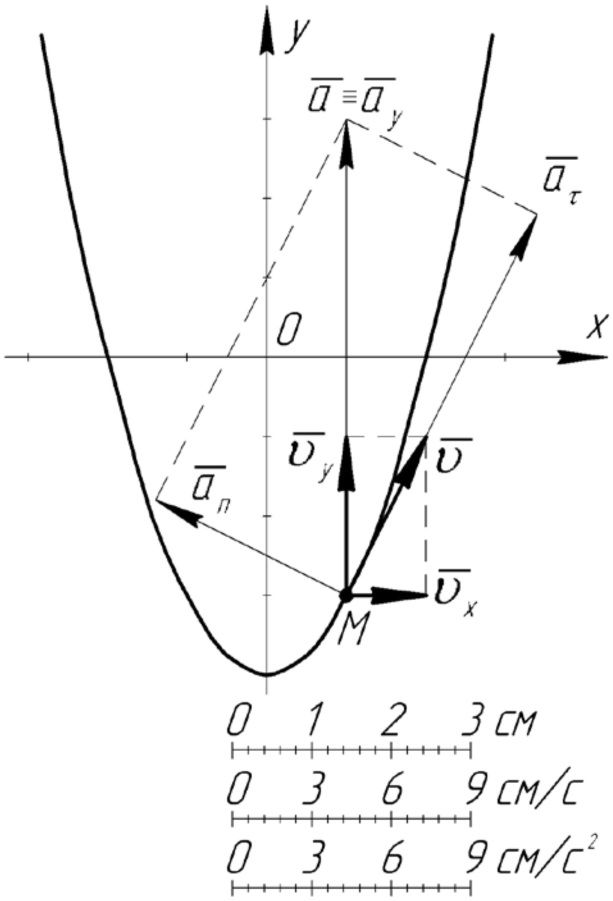

Рис. 1.11

Таким образом, траекторией точки *M* является парабола с вершиной в точке с координатами $(0,-4)$ (рис. 1.11).

Определим положение точки на траектории в момент времени $t_1 = 1/3\ c$:

y

Покажем точку на траектории в положении $M(1,-3)$.

Проекции скорости точки *M* на координатные оси:

При $t_1 = 1/3\ c$: $\upsilon_y = 6\ см/с$.

Скорость точки *M* в этот момент:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}7\ см/с. \qquad (1.80)$$

Покажем вектор скорости $\overline{\upsilon}$ и его составляющие на графике в выбранном масштабе (рис. 1.11).

Проекции ускорения точки *M*:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = 0, \quad a_y = \dot{\upsilon}_y = 18\ см/с. \qquad (1.81)$$

Таким образом, ускорение точки *M*:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_y = 18\ см/с^2. \qquad (1.82)$$

Касательное ускорение точки найдем из уравнения:

$$a_\tau = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon} = \frac{6 \cdot 18}{6,7} = 16,1 \ см/с^2 . \quad (1.83)$$

Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{18^2 - 16,1^2} = 8 \ см/с^2 . \quad (1.84)$$

Показываем векторы ускорений на графике (рис. 1.11). Касательное ускорение положительно, значит, вектор $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор $\overline{\upsilon}$. Вектор $\overline{a}_n$ будет перпендикулярен вектору $\overline{a}_\tau$ и направлен в сторону вогнутости траектории.

Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{6,7^2}{8} = 5,6 \ см . \quad (1.85)$$

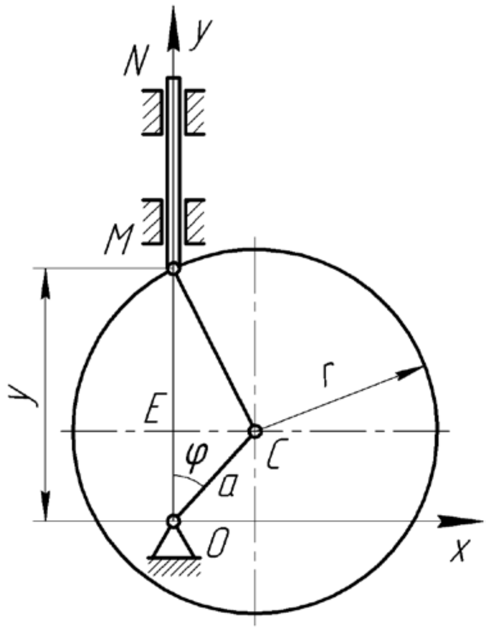

Рис. 1.12

Задача 1.9. Круглый эксцентрик радиуса r вращается вокруг оси O, отстоящей от геометрической оси C эксцентрика на расстоянии $OC = b$ (рис. 1.12); угол φ изменяется по закону $\varphi = \pi t/2$ (φ – в радианах, t – в секундах). Найти уравнение движения стержня MN в вертикальных направляющих, а также его скорость и ускорение при $t_1 = 3 \ с$.

Решение:

Движение точки M стержня (а, следовательно, и всего стержня) будет определяться координатой

$$y = OE$$

где $OE = b\cos\varphi$,

$$EM = \sqrt{CM^2 - CE^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 - b$$

Тогда:

$$y = b\cos\varphi + \sqrt{r^2 - b^2 \sin^2 \varphi} . \quad (1.88)$$

Подставляя значения φ и r, получим:

$$y = \frac{r}{3}\cos\frac{\pi t}{2} + \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9}\sin^2\frac{\pi t}{2}} \quad (1.89)$$

или

$$y=\frac{r}{3}\left(\cos\frac{\pi t}{2}+\sqrt{9-\sin^2\frac{\pi t}{2}}\right). \qquad (1.90)$$

Полученное уравнение и будет являться уравнением движения стержня. Продифференцировав его по времени, найдем уравнение скорости стержня:

$$\upsilon=\frac{dy}{dt}=\frac{r}{3}\left(-\sin\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2\sin(\pi t/2)\cos(\pi t/2)}{2\sqrt{9-\sin^2(\pi t/2)}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\pi r}{6}\sin\frac{\pi t}{2}\left(1+\frac{\cos(\pi t/2)}{\sqrt{9-\sin^2(\pi t/2)}}\right). \qquad (1.91)$$

Скорость стержня при $t_1=3\ c$:

$$\upsilon_1=\pi r/6. \qquad (1.92)$$

Найдем ускорение стержня, продифференцировав по времени уравнение скорости:

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{\pi r}{6}\left[\cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\cos(\pi t/2)}{\sqrt{9-\sin^2(\pi t/2)}}\right)+\right.$$

$$+\sin\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{1}{9-\sin^2(\pi t/2)}\cdot\left(-\sin\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{9-\sin^2(\pi t/2)}+\right.$$

$$\left.\left.+\cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\sin(\pi t/2)\cos(\pi t/2)}{\sqrt{9-\sin^2(\pi t/2)}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (1.93)$$

Ускорение точки при $t_1=3\ c$:

$$a_1=\sqrt{2}\pi^2 r/48. \qquad (1.94)$$

Таким образом, в момент $t_1=3\ c$ стержень движется ускоренно вверх.

Задача 1.10. Гибкая нерастяжимая нить одним концом закреплена в точке *D*, а другим перекинута через блок *B*, находящийся на той же высоте, что и точка *D* (рис. 1.13). Расстояния $DB=l$, $DC=b$. Определить вертикальную составляющую скорости груза *M* в зависимости от угла *φ*, образованного частью *DC* нити с вертикалью, если конец нити *A* тянут с постоянной скоростью *u*.

Решение:

Т.к. нить нерастяжима, то точка *C* будет при движении двигаться по окружности с центром в точке *D* и радиуса *DC* (рис. 1.13). Вектор скорости точки *C* $\bar{\upsilon}$ будет направлен по касательной к этой окружности (т.е. перпендикулярно *DC*) в сторону увеличения угла *φ*.

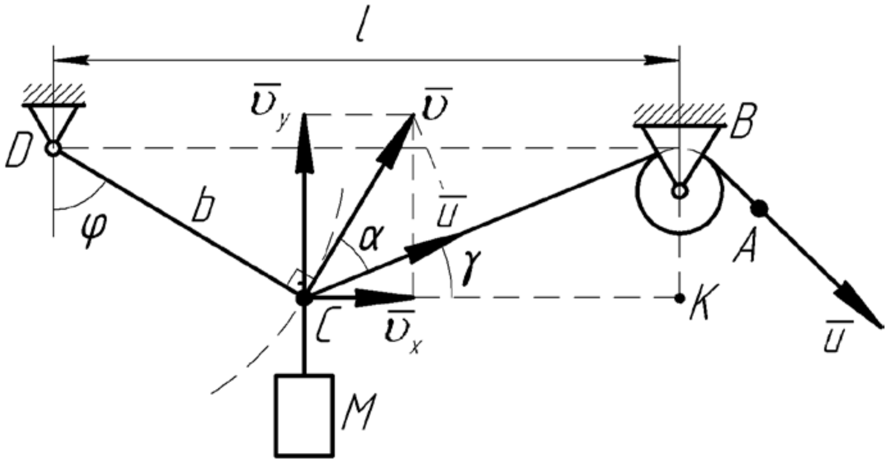

Рис. 1.13

Скорость $\bar{u}$ точки A перенесем вдоль нити в точку C. Тогда скорость точки C:

$$\upsilon = \frac{u}{\cos\alpha}, \tag{1.95}$$

где α – угол между векторами $\bar{\upsilon}$ и $\bar{u}$.

Вертикальная составляющая вектора $\bar{\upsilon}$:

$$\upsilon_y = \upsilon \sin\varphi = \frac{u}{\cos\alpha}\sin\varphi. \tag{1.96}$$

Угол $\alpha = \varphi - \gamma$, где γ – угол наклона нити к горизонту. Тогда:

$$\cos\alpha = \cos(\varphi - \gamma) = \cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma. \tag{1.97}$$

В прямоугольном треугольнике BCK:

$$BK = b\cos\varphi, \tag{1.98}$$

$$CK = l - b\sin\varphi, \tag{1.99}$$

$$BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = \sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}, \tag{1.100}$$

$$\sin\gamma = \frac{BK}{BC} = \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}}, \tag{1.101}$$

$$\cos\gamma = \frac{CK}{BC} = \frac{l - b\sin\varphi}{\sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}}. \tag{1.102}$$

Подставив найденные значения $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ в выражение (1.97), получим:

$$\cos\alpha = \frac{l\cos\varphi}{\sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}}. \tag{1.103}$$

Тогда вертикальная составляющая:

$$\upsilon_y = u\sin\varphi\frac{\sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}}{l\cos\varphi} = \frac{u\,\mathrm{tg}\,\varphi}{l}\cdot\sqrt{b^2 + l^2 - 2bl\sin\varphi}. \tag{1.104}$$

Задача 1.11. Точка *M* движется в плоскости *Oxy* с постоянной скоростью $\bar{\upsilon}$ (рис. 1.14). Угол наклона вектора $\bar{\upsilon}$ при движении точки изменяется по закону $\varphi = kt$ (k – постоянная величина). Определить траекторию точки и ее ускорение, если в начальный момент точка находилась в начале координат.

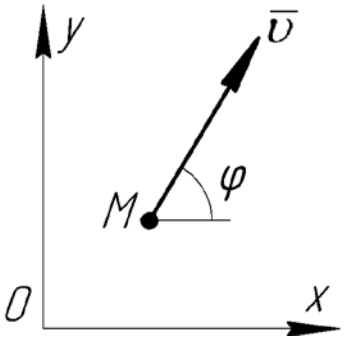

Рис. 1.14

Решение:

Найдем проекции вектора скорости на оси координат:

$$\upsilon_x = \upsilon\cos\varphi = \upsilon\cos kt, \qquad (1.105)$$

$$\upsilon_y = \upsilon\sin\varphi = \upsilon\sin kt. \qquad (1.106)$$

Учитывая, что $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$, запишем:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon\cos kt, \qquad \frac{dy}{dt} = \upsilon\sin kt. \qquad (1.107)$$

Домножим обе части уравнений на dt и проинтегрируем, причем нижними пределами интегрирования будут координаты точки и время в начале координат ($x = 0$, $y = 0$, $t = 0$), а верхними пределами – координаты и время в произвольном положении точки:

$$\int_0^x dx = \upsilon\int_0^t \cos kt dt, \quad \int_0^y dy = \upsilon\int_0^t \sin kt dt; \qquad (1.108)$$

$$x = \frac{\upsilon}{k}\sin kt, \quad y = \frac{\upsilon}{k}(1 - \cos kt). \qquad (1.109)$$

Чтобы определить траекторию точки *M*, преобразуем уравнения движения (1.109) и возведем в квадрат:

$$x^2 = \frac{\upsilon^2}{k^2}\sin^2 kt, \quad \left(y - \frac{\upsilon}{k}\right)^2 = \frac{\upsilon^2}{k^2}\cos^2 kt. \qquad (1.110)$$

Сложив соответствующие части уравнений, найдем уравнение траектории точки:

$$x^2 + \left(y - \frac{\upsilon}{k}\right)^2 = \frac{\upsilon^2}{k^2}. \qquad (1.111)$$

Таким образом, траекторией точки *M* является окружность радиуса $R = \upsilon/k$ с центром в точке $(0, \upsilon/k)$.

Касательное ускорение точки $a_\tau = d\upsilon/dt = 0$, следовательно, полное ускорение точки *M* будет равно нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon/k} = k\upsilon. \qquad (1.112)$$

Задача 1.12. Катушка для кабеля катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью центра $\bar{\upsilon}_O$ (рис. 1.15). Определить закон движения точки *M* обода катушки $s = f(t)$, где s – криволинейная координата точки *M* отсчитываемая вдоль ее траектории от начального положения M_0. Также найти расстояние *S*, которое пройдет точка *M* до того момента, когда она займет высшее положение M_1. В начальный момент точка находилась в точке касания катушки с поверхностью, радиус катушки *R*.

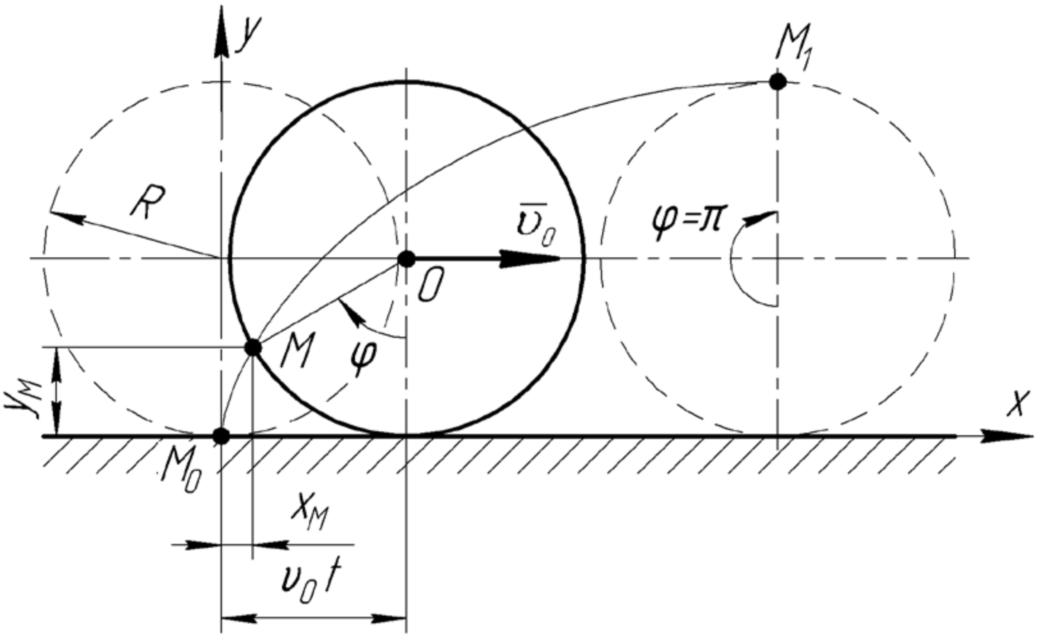

Рис. 1.15

Решение:

Изобразим катушку в произвольном положении (рис. 1.15) и покажем на ее ободе точку *M*. Координаты точки *M* в этот момент:

$$x_M = \upsilon_O t - R\sin\varphi, \quad y_M = R - R\cos\varphi. \tag{1.113}$$

Вследствие того, что катушка катится без скольжения, имеем

$$\upsilon_O t = \varphi R, \tag{1.114}$$

откуда $\varphi = \upsilon_O t / R$.

Подставляя данное значение в уравнения (1.113), получим:

$$x_M = \upsilon_O t - R\sin\frac{\upsilon_O t}{R}, \quad y_M = R - R\cos\frac{\upsilon_O t}{R}. \tag{1.115}$$

Проекции скорости точки *M* на координатные оси:

$$\upsilon_x = \dot{x}_M = \upsilon_O - \frac{\upsilon_O}{R}\cdot R\cos\frac{\upsilon_O t}{R} = \upsilon_O\left(1 - \cos\frac{\upsilon_O t}{R}\right), \tag{1.116}$$

$$\upsilon_y = \dot{y}_M = \frac{\upsilon_O}{R}\cdot R\sin\frac{\upsilon_O t}{R} = \upsilon_O\sin\frac{\upsilon_O t}{R}. \tag{1.117}$$

Скорость точки *M*:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{\upsilon_O^2\left(1-\cos\frac{\upsilon_O t}{R}\right)^2+\upsilon_O^2\sin^2\frac{\upsilon_O t}{R}}=$$

$$=\upsilon_O\sqrt{1-2\cos\frac{\upsilon_O t}{R}+\cos^2\frac{\upsilon_O t}{R}+\sin^2\frac{\upsilon_O t}{R}}=\upsilon_O\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\upsilon_O t}{R}\right)}. \quad (1.118)$$

Используя формулу половинного аргумента

$$\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}=\sin\frac{\varphi}{2}, \quad (1.119)$$

окончательно получим:

$$\upsilon=2\upsilon_O\sin\frac{\upsilon_O t}{2R}. \quad (1.120)$$

При естественном способе задания движения скорость точки равна первой производной по времени от закона движения точки:

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}, \quad (1.121)$$

откуда

$$ds=\upsilon dt. \quad (1.122)$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^s ds=2\upsilon_O\int_0^t\sin\frac{\upsilon_O t}{2R}dt, \quad (1.123)$$

$$s=-4R\cos\frac{\upsilon_O t}{2R}\bigg|_0^t. \quad (1.124)$$

После подстановки пределов интегрирования получим закон движения точки *M* в естественной форме:

$$s=-4R\left(\cos\frac{\upsilon_O t}{2R}-1\right)=8R\sin^2\frac{\upsilon_O t}{4R}. \quad (1.125)$$

Когда точка *M* будет находиться в наивысшем положении, то $\varphi=\pi$ (рис. 1.15). Время поворота на угол π найдем из уравнения (1.114):

$$t=\frac{\pi R}{\upsilon_O}. \quad (1.126)$$

Подставляя данное значение в закон движения, найдем пройденный точкой *M* путь s_1 за это время:

$$s_1=8R\sin^2\frac{\pi}{4}=4R. \quad (1.127)$$

Применять уравнение (1.125) при больших значениях t нельзя, т.к., например, при $t=4\pi R/\upsilon_O$ получим некорректный результат:

$$s=8R\sin^2\pi=0. \quad (1.128)$$

Это связано с тем, что при $\left(2\pi R/\upsilon_O\right)<t<\left(4\pi R/\upsilon_O\right)$ угол φ принимает значения $\pi < \varphi < 2\pi$, при которых $\sin\frac{\upsilon_O t}{4R}$ отрицателен. Тогда уравнение (1.123) проинтегрируем следующим образом:

$$\int_0^s ds = 2\upsilon_O\left[\int_0^{2\pi R/\upsilon_O}\sin\frac{\upsilon_O t}{2R}dt + \int_{2\pi R/\upsilon_O}^{t}\left(-\sin\frac{\upsilon_O t}{2R}\right)dt\right], \qquad (1.129)$$

$$s = 4R\left[\left.-\cos\frac{\upsilon_O t}{2R}\right|_0^{2\pi R/\upsilon_O} + \left.\cos\frac{\upsilon_O t}{2R}\right|_{2\pi R/\upsilon_O}^{0}\right] =$$

$$= 4R\left[-2\cos\pi + \cos 0 + \cos\frac{\upsilon_O t}{2R}\right] = 4R\left(3 + \cos\frac{\upsilon_O t}{2R}\right). \qquad (1.130)$$

Используя формулу квадрата косинуса:

$$\frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \cos^2\varphi, \qquad (1.131)$$

получим:

$$s = 8R\left(1 + \cos^2\frac{\upsilon_O t}{4R}\right). \qquad (1.132)$$

Задача 1.13. Автомобиль, имея начальную скорость $54\ км/ч$, прошел $600\ м$ в первые $30\ с$. Считая движение автомобиля равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение автомобиля происходит на закруглении радиуса $R = 1\ м$.

Решение:

Уравнения скорости и пути при равнопеременном движении автомобиля:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t, \qquad (1.133)$$

$$s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad (1.134)$$

где $s_0 = 0$.

Касательное ускорение автомобиля найдем из уравнения (1.134):

$$a_\tau = \frac{2(s-\upsilon_0 t)}{t^2} = \frac{2\cdot(600 - 15\cdot 30)}{30^2} = 0{,}333\ м/с^2. \qquad (1.135)$$

Теперь из уравнения (1.133) определим скорость автомобиля:

$$\upsilon = 15 + 0{,}333\cdot 30 = 25\ м/с. \qquad (1.136)$$

Нормальное ускорение автомобиля:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{25^2}{1000} = 0{,}625\ м/с^2. \qquad (1.137)$$

Полное ускорение автомобиля:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}333^2 + 0{,}625^2} = 0{,}708\ м/с^2. \qquad (1.138)$$

Задача 1.14. Велосипедист начинает движение по треку, представляющему собой окружность радиуса *R*, и совершает один круг за время *T*. Определить скорость и ускорение велосипедиста в конце времени *T*.

Решение:

Уравнения скорости и пути при равнопеременном движении имеют следующий вид:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t, \quad s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{1.139}$$

где $\upsilon_0 = 0$ и $s_0 = 0$.

Подставляя в уравнения $t = T$, получим:

$$\upsilon = a_\tau T, \tag{1.140}$$

$$s = \frac{a_\tau T^2}{2}. \tag{1.141}$$

Разделим уравнение (1.140) на (1.141) и выразим отсюда скорость:

$$\upsilon = \frac{2s}{T}. \tag{1.142}$$

Пройденный по треку путь составит $s = 2\pi R$, тогда:

$$\upsilon = \frac{4\pi R}{T}. \tag{1.143}$$

Касательное ускорение точки найдем из уравнения (1.140):

$$a_\tau = \frac{\upsilon}{T} = \frac{4\pi R}{T^2}. \tag{1.144}$$

а нормальное ускорение по формуле:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{16\pi^2 R}{T^2}. \tag{1.145}$$

Тогда ускорение точки будет равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi R}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{16\pi^2 R}{T^2}\right)^2} = \frac{4\pi R}{T^2}\sqrt{1 + 16\pi^2}. \tag{1.146}$$

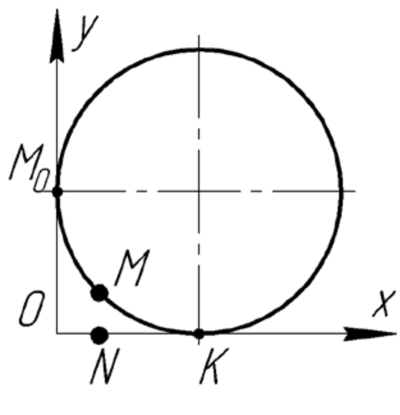

Рис. 1.16

Задача 1.15. Точка *M*, выйдя из положения $M_0(0, R)$ (рис. 1.16), движется против часовой стрелки равноускоренно по окружности $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R_2$ с начальной скоростью υ_0. В то же время из начала координат – точки *O* вышла точка *N*, двигаясь по оси x равноускоренно без начальной скорости. Каково должно быть касательное ускорение a_τ^M точки M и ускорение a_N точки N, чтобы в точку $K(R,0)$ обе точки пришли одновременно с одинаковыми по величине и направлению скоростями?

Решение:

При равноускоренном движении точек M и N их уравнения движения будут:

$$s_M = \upsilon_0 t + \frac{a_M^\tau t^2}{2}, \quad s_N = \frac{a_N t^2}{2}. \tag{1.147}$$

Придя в точку K, точки M и N пройдут расстояния:

$$s_M = \frac{\pi R}{2}, \quad s_N = R. \tag{1.148}$$

Приравняем уравнения (1.147) и (1.148), и найдем значения ускорений:

$$a_M^\tau = \frac{\pi R - 2\upsilon_0 t}{t^2}, \quad a_N = \frac{2R}{t^2}. \tag{1.149}$$

Чтобы найти время движения точек, запишем уравнения скоростей точек:

$$\upsilon_M = \upsilon_0 + a_M^\tau \cdot t, \tag{1.150}$$

$$\upsilon_N = a_N \cdot t, \tag{1.151}$$

и приравняем их:

$$\upsilon_0 + a_M^\tau \cdot t = a_N \cdot t. \tag{1.152}$$

Подставив сюда значения (1.149) ускорений, получим:

$$t = \frac{(\pi - 2)R}{\upsilon_0}. \tag{1.153}$$

Тогда искомые ускорения будут:

$$a_M^\tau = \frac{\left[\pi R - 2\upsilon_0 R(\pi - 2)/\upsilon_0\right]\upsilon_0^2}{(\pi - 2)^2 R^2} = \frac{(\pi - 2\pi + 4)\upsilon_0^2}{(\pi - 2)^2 R} = \frac{(4 - \pi)\upsilon_0^2}{(\pi - 2)^2 R}, \tag{1.154}$$

$$a_N = \frac{2R\upsilon_0^2}{(\pi - 2)^2 R^2} = \frac{2\upsilon_0^2}{(\pi - 2)^2 R}. \tag{1.155}$$

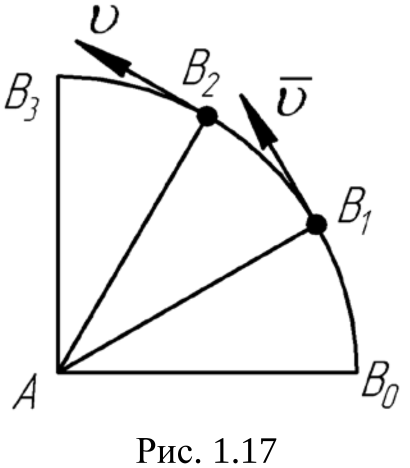

Рис. 1.17

Задача 1.16. Разводной мост поворачивается на 90° (рис. 1.17). Считая при повороте от 0° до 30° – вращение равноускоренным, при повороте от 30° до 60° – равномерным, и при повороте от 60° до 90° – равнозамедленным, определить время поворота, если известно, что максимальная скорость конца моста (точки B) $\upsilon = 1$ $м/с$, а длина моста $AB = 48$ $м$.

Решение:

Пути, проходимые точкой B при повороте моста на всех трех участках, равны:

$$s = B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \frac{\pi}{6} \cdot AB = \frac{\pi}{6} \cdot 48 = 8\pi . \tag{1.156}$$

1) При повороте пролета моста от 0° до 30° точка B будет двигаться равноускоренно, а ее скорость на этом участке будет возрастать от 0 до максимального значения υ. Тогда уравнение движения точки B по траектории и уравнение скорости точки будут:

$$s = \frac{a_\tau t_1^2}{2}, \quad \upsilon = a_\tau t_1 . \tag{1.157}$$

Разделив первое уравнение на вторoe, выразим время движения точки на первом участке:

$$t_1 = \frac{2s}{\upsilon} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3{,}14}{1} = 50{,}24 \ с . \tag{1.158}$$

2) При повороте пролета моста от 30° до 60° движении точки B будет равномерным ($\upsilon = const$), а ее уравнение движения:

$$s = \upsilon t_2 , \tag{1.159}$$

откуда время движения точки на втором участке:

$$t_2 = \frac{s}{\upsilon} = \frac{8 \cdot 3{,}14}{1} = 25{,}12 \ с . \tag{1.160}$$

3) При повороте пролета моста равнозамедленном движении точки от 60° до 90° движении точки B будет равнозамедленным, а ее скорость на этом участке будет убывать от υ до 0. Тогда уравнение движения точки по траектории и уравнение скорости:

$$s = \upsilon t_3 + \frac{a_\tau t_3^2}{2}, \quad 0 = \upsilon + a_\tau t_3 . \tag{1.161}$$

Выражая из второго уравнения $a_\tau t_3 = -\upsilon$, и подставляя в первое, получим:

$$s = \upsilon t_3 - \frac{\upsilon t_3}{2} = \frac{\upsilon t_3}{2}, \tag{1.162}$$

откуда время движения точки B на третьем участке:

$$t_3 = \frac{2s}{\upsilon} = t_1 = 50{,}24 \ с . \tag{1.163}$$

Общее время движения точки B, а, следовательно, и время поворота пролета моста будет:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 50{,}24 + 25{,}12 + 50{,}24 = 125{,}6 \ с . \tag{1.164}$$

2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси представляет собой функциональную зависимость угла поворота тела от времени:

$$\varphi = f\left(t\right). \tag{2.1}$$

Угол φ измеряется в *радианах*. В том случае, если угол поворота задается числом оборотов, то:

$$\varphi = 2\pi N_{об}, \tag{2.2}$$

где $N_{об}$ – количество оборотов тела.

Угловая скорость. *Числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени:*

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.3}$$

Угловая скорость измеряется в *рад/с*. В том случае, если известна частота вращения тела *n* (*об/мин*), то угловую скорость тела определяют по формуле:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{2.4}$$

Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки.

Угловое ускорение. *Числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{2.5}$$

или

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{2.6}$$

Угловое ускорение измеряется в *рад/с²*.

Вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения. Направление $\overline{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\overline{\omega}$, когда тело вращается ускоренно ($\varepsilon > 0$), и противоположно $\overline{\omega}$ при замедленном вращении ($\varepsilon < 0$).

Равнопеременное вращение тела – *это вращение тела с постоянным угловым ускорением:*

$$\varepsilon = const. \tag{2.7}$$

Закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{2.8}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость тела, рад/с.

Закон равнопеременного вращения тела:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (2.9)$$

где φ_0 – начальный угол поворота тела, рад; как правило, в задачах $\varphi_0 = 0$.

Траектория, скорость и ускорение точки вращающегося тела. *Траекторией точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения.*

Линейная (окружная) скорость точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения:

$$\upsilon = \omega r, \qquad (2.10)$$

Вектор скорости $\bar{\upsilon}$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

Касательное ускорение точки при вращении твердого тела называется также вращательным и равно произведению углового ускорения на расстояние от точки до оси вращения:

$$a_{вр} = \varepsilon r. \qquad (2.11)$$

Вектор $\bar{a}_{вр}$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела, если $a_{вр} > 0$, и противоположно вращению тела, если $a_{вр} < 0$.

Нормальное ускорение точки при вращении твердого тела называется также центростремительным и равно произведению квадрата угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения:

$$a_ц = \omega^2 r. \qquad (2.12)$$

Вектор $\bar{a}_ц$ направлен к центру описываемой точкой окружности.

Ускорение точки вращающегося тела равно:

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_ц^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (2.13)$$

Задача 2.1. Устройство для фотографирования земной поверхности летит на высоте $h = 800$ *км* горизонтально со скоростью $\upsilon = 7{,}55$ *км/с* и при равномерно вращается вокруг своей оси (рис. 2.1). Аппарат, оптическая ось которого перпендикулярна к оси устройства, делает автоматический снимок каждый раз в момент, когда его объектив занимает наинизшее положение. С какой угловой скоростью должно вращаться устройство вокруг своей оси, чтобы при фотографировании не перекрывались соседние кадры, если угол съемки $\alpha = 1°$?

Решение:

Для того чтобы не было перекрытия снимками друг друга необходимо, чтобы время прохождения устройством расстояния l земной поверхности (рис. 2.1), охватываемого одним снимком и время поворота

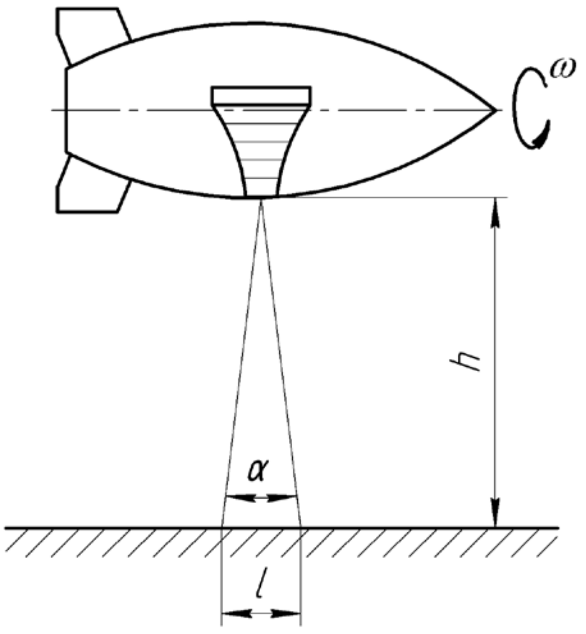

Рис. 2.1

устройства на 1 *оборот*, т.е. на 2π, равнялись:

откуда угловая скорость устройства:

Расстояние, соответствующее углу α:

Тогда

$$\omega = \frac{2\pi \cdot \upsilon}{h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}55}{800 \cdot \mathrm{tg}\,1^\circ} =$$

что соответствует частоте вращения

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 3{,}4}{3{,}14} = 32{,}5\ о$$

Задача 2.2. Определить угловое ускорение и число оборотов вентилятора очистительной машины до остановки, считая вращение равнопеременным, если в начале вращения угловая скорость $\omega_0 = 20\pi\ рад/с$, и он останавливается вследствие наличия сил сопротивления через 20 *с*.

Решение:

При равнопеременном вращении уравнение угловой скорости и уравнение вращения имеют вид

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{2.19}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{2.20}$$

Из первого уравнения, считая $\omega = 0$, найдем угловое ускорение вентилятора:

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{20\pi}{20} = -\pi = -3{,}14\ рад/c^2. \tag{2.21}$$

Знак «минус» показывает, что вентилятор вращается замедленно.

Подставив значение ε в уравнение вращения, получим:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{20\pi \cdot 20}{2} = 200\pi\ рад. \tag{2.22}$$

Таким образом, число оборотов вентилятора до остановки:

$$N_{об} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100\ оборотов. \tag{2.23}$$

Задача 2.3. Самолет, который летит прямолинейно горизонтально с постоянной скоростью υ, сопровождается лучом прожектора (рис. 2.2). С какой угловой скоростью должен поворачиваться луч прожектора, если кратчайшее расстояние между прожектором и самолетом равно h.

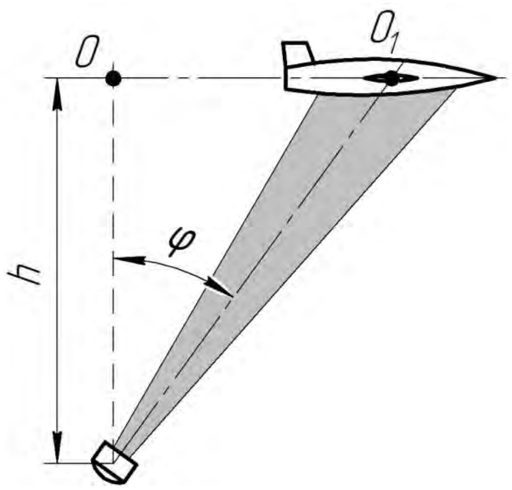

Рис. 2.2

Решение:

При прямолинейном горизонтальном полете за время t самолет переместится на расстояние

O

Тогда луч прожектора за это же время повернется на угол φ, тангенс которого равен:

tg

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{1}{\cos}$$

откуда найдем угловую скорость луча:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\upsilon}{h} \cdot \cos^2 \varphi \,. \qquad (2.27)$$

Задача 2.4. В кулисном механизме (рис. 2.3) определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы OC в момент, когда $\varphi = \pi/4$, если штанга AB движется с постоянной скоростью u. Расстояние $OB = l$, в начальный момент $\varphi = 0$.

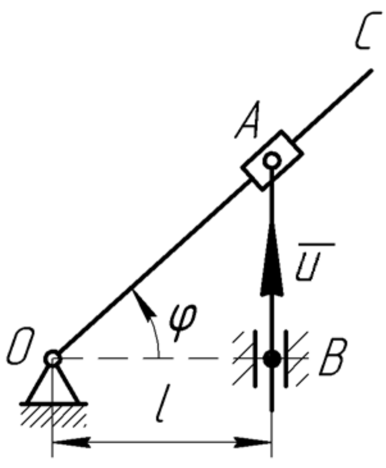

Рис. 2.3

Решение:

В прямоугольном треугольнике OAB:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{AB}{l} =$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \dot{\varphi} =$$

откуда найдем угловую скорость кулисы:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{u}{l} \cdot \cos^2 \varphi \,. \qquad (2.30)$$

Угловое ускорение найдем, продифференцировав по времени угловую скорость:

$$\varepsilon=\dot{\omega}=-\frac{u}{l}\cdot 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}=-\frac{u}{l}\cdot\sin 2\varphi\cdot\frac{u}{l}\cdot\cos^2\varphi=$$

$$=-\frac{u^2}{l^2}\cdot\sin 2\varphi\cdot\cos^2\varphi. \qquad (2.31)$$

При $\varphi=\pi/4$ значения угловой скорости и углового ускорения составят:

$$\omega=\frac{u}{l}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{u}{2l}, \qquad (2.32)$$

$$\varepsilon=-\frac{u^2}{l^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}=-\frac{u^2}{2l^2}. \qquad (2.33)$$

Задача 2.5. Вентилятор вращается по закону $\varphi=kt^3$ (k – коэффициент пропорциональности). За время $t=4\ с$ он сделал 100 *оборотов*. Определить уравнение движения точки *М* лопасти вентилятора, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r=0{,}5\ м$, а также ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения в этот момент.

Решение:

За время *t* угол поворота тела составит:

$$\varphi=2\pi N_{об}=2\cdot 3{,}14\cdot 100=628{,}3\ рад. \qquad (2.34)$$

Найдем коэффициент пропорциональности из уравнения вращения вентилятора, подставив в это уравнение угол поворота и время:

$$k=\frac{\varphi}{t^3}=\frac{628{,}3}{4^3}=9{,}8\ \ рад/c^3. \qquad (2.35)$$

Тогда уравнение вращения вентилятора:

$$\varphi=9{,}8t^3. \qquad (2.36)$$

Уравнение движения точки *М*:

$$s=\varphi r=9{,}8t^3\cdot 0{,}5=4{,}9t^3. \qquad (2.37)$$

Угловая скорость вентилятора:

$$\omega=\dot{\varphi}=9{,}8\cdot 3t^2=29{,}4t^2. \qquad (2.38)$$

Угловое ускорение вентилятора:

$$\varepsilon=\dot{\omega}=29{,}4\cdot 2t=58{,}8t. \qquad (2.39)$$

Скорость точки *М*:

$$\upsilon=\omega r=29{,}4t^2\cdot 0{,}5=14{,}7t^2. \qquad (2.40)$$

При $t=4\ c$:

$$\upsilon=14{,}7\cdot 4^2=235{,}2\ \ м/c. \qquad (2.41)$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки *М*:

$$a_{вр}=\varepsilon r=58{,}8t\cdot 0{,}5=29{,}4t, \qquad (2.42)$$

$$a_ц = \omega^2 r = \left(29,4t^2\right)^2 \cdot 0,5 = 432,2t^4. \qquad (2.43)$$

При $t = 4\ c$:

$$a_{вр} = 29,4 \cdot 4 = 117,6\ м/с^2, \qquad (2.44)$$

$$a_ц = 432,2 \cdot 4^4 = 110643,2\ м/с^2. \qquad (2.45)$$

Полное ускорение точки *M*:

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_ц^2} = \sqrt{117,6^2 + 110643,2^2} = 110643,3\ м/с^2. \qquad (2.46)$$

Задача 2.6. Механизм состоит из колес *2* и *3*, находящихся в зацеплении, и груза *1*, который приводит механизм в движение (рис. 2.4, *а*). Уравнение движения груза *1* $x = 18t^2 + 5t + 12$, см. Радиусы колес: $r_2 = 20\ см$, $R_2 = 40\ см$, $R_3 = 50\ см$. Определить в момент времени $t = 4\ c$ скорость и ускорение точки *M* колеса *3* механизма.

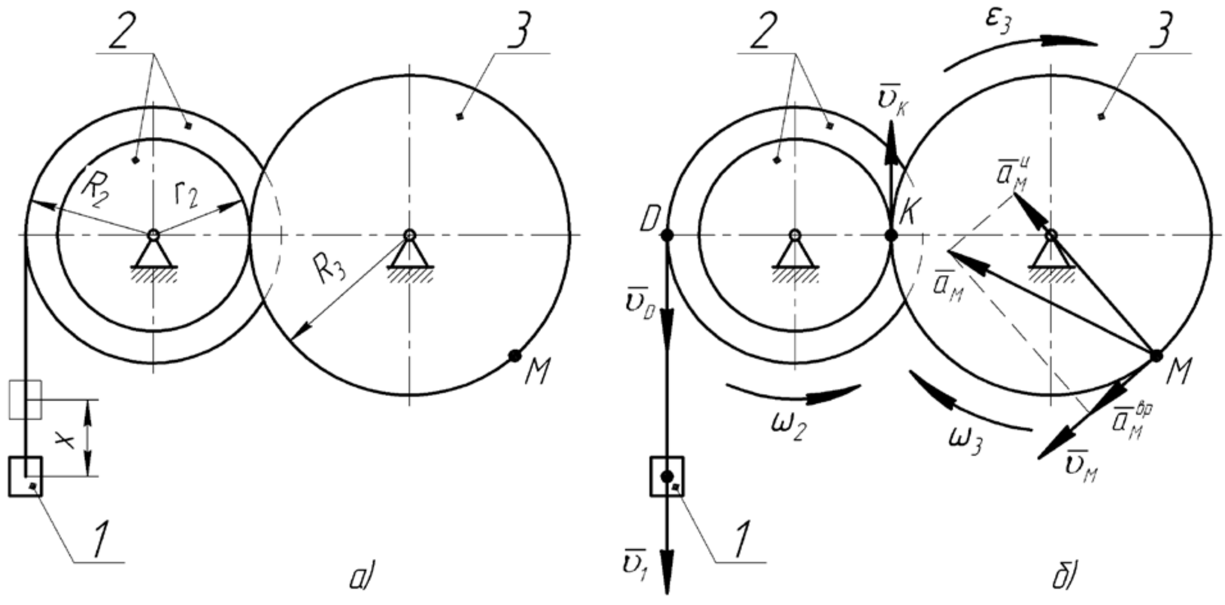

Рис. 2.4

Решение:

Скорость груза:

$$\upsilon_1 = \dot{x} = 36t + 5. \qquad (2.47)$$

Вектор $\bar{\upsilon}_1$ направляем в сторону увеличения координаты *x* (рис. 2.4, *б*).

Вследствие нерастяжимости нити скорость точки *D* на внешнем ободе колеса *2* и скорость груза равны:

$$\upsilon_D = \upsilon_1. \qquad (2.48)$$

Тогда угловая скорость колеса *2*:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{R_2} = \frac{\upsilon_1}{R_2}. \qquad (2.49)$$

Направление вращения колеса *2* определяем по направлению вектора $\overline{\upsilon}_D$. От колеса *2* к колесу *3* движение передается в точке их зацепления – точке *K*. Скорость этой точки:

$$\upsilon_K = \omega_2 r_2 = \upsilon_1 \frac{r_2}{R_2}. \tag{2.50}$$

Колеса *2* и *3* вращаются без проскальзывания, следовательно, угловая скорость колеса *3*:

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_K}{R_3} = \upsilon_1 \frac{r_2}{R_2 R_3}, \tag{2.51}$$

или с учетом числовых значений:

$$\omega_3 = \left(36t + 5\right) \cdot \frac{20}{40 \cdot 50} = 0{,}36t + 0{,}05. \tag{2.52}$$

Угловое ускорение колеса *3*:

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 0{,}36 \ \ рад/с^2. \tag{2.53}$$

В момент времени $t = 4 \ с$ угловая скорость колеса *3*:

$$\omega_3 = 0{,}36 \cdot 4 + 0{,}05 = 1{,}49 \ \ рад/с. \tag{2.54}$$

Скорость точки *M* в этот момент времени:

$$\upsilon_K = \omega_3 R_3 = 1{,}49 \cdot 50 = 74{,}5 \ см/с. \tag{2.55}$$

Центростремительное и вращательное ускорения точки *M*:

$$a_M^ц = \omega_3^2 R_3 = 1{,}49^2 \cdot 50 = 111 \ см/с^2, \tag{2.56}$$

$$a_M^{вр} = \varepsilon_3 R_3 = 0{,}36 \cdot 50 = 18 \ см/с^2. \tag{2.57}$$

Ускорение точки *M*:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^ц\right)^2 + \left(a_M^{вр}\right)^2} = \sqrt{111^2 + 18^2} = 112{,}4 \ см/с^2. \tag{2.58}$$

Задача 2.7. При наличии крутильных колебаний вращение вала описывается уравнением

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \sin kt, \tag{2.59}$$

где φ_0, ω_0, k – постоянные величины.

Определить скорость и ускорение точки *M* вала, находящейся от оси вала на расстоянии *r*.

Решение:

Найдем угловую скорость вала:

$$\omega = \dot{\varphi} = \omega_0 + \varphi_0 k \cos kt. \tag{2.60}$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -\varphi_0 k^2 \sin kt. \tag{2.61}$$

Скорость точки *M*:

$$\upsilon_M = \omega r = \left(\omega_0 + \varphi_0 k \cos kt\right) r. \tag{2.62}$$

Максимальное значение скорости точки будет в те моменты времени, когда $\cos kt = 1$:

$$\upsilon_M^{\max} = \left(\omega_0 + \varphi_0 k\right) r. \tag{2.63}$$

Центростремительное ускорение точки *M*:

$$a_ц = \omega^2 r = \left(\omega_0 + \varphi_0 k \cos kt\right)^2 r. \tag{2.64}$$

Максимальное значение $a_ц$ будет также при $\cos kt = 1$:

$$a_ц^{\max} = \left(\omega_0 + \varphi_0 k\right)^2 r. \tag{2.65}$$

Вращательное ускорение точки:

$$a_{вр} = \left|\varepsilon\right| r = \varphi_0 k^2 r \sin kt. \tag{2.66}$$

Максимальное значение $a_{вр}$ будет при $\sin kt = 1$:

$$a_{вр}^{\max} = \varphi_0 k^2 r. \tag{2.67}$$

Полное ускорение точки *M*:

$$a = \sqrt{a_ц^2 + a_{вр}^2} = r\sqrt{\left(\omega_0 + \varphi_0 k \cos kt\right)^4 + \varphi_0^2 k^4 r \sin^2 kt}. \tag{2.68}$$

Задача 2.8. Циолковский К.Э. для создания искусственной силы тяжести на обитаемых орбитальных станциях, имеющих форму кольца (тора), предлагал сообщать им вращательное движение вокруг оси симметрии. Определить период вращения станции, необходимый для того чтобы, находящиеся в них космонавты имели земной вес, если их расстояние до оси вращения равно $19,6\ м$, ускорение свободного падения принять $g = 9,82\ м/с^2$.

Решение:

Для того чтобы космонавт чувствовал на орбите земной вес, необходимо, чтобы центростремительное ускорение космонавта, находящегося на станции, равнялось ускорению свободного падения:

$$g = a_ц = \omega^2 R. \tag{2.69}$$

Отсюда найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9,82}{19,6}} = 0,7\ рад/с. \tag{2.70}$$

Станция должна вращаться равномерно, т.е. $\omega = const$ – в этом случае вращательное ускорение будет равно нулю: $a_{вр} = 0$.

Период вращения станции будет представлять собой время 1 оборота станции вокруг оси, т.е. $2\pi = \omega T$. Тогда:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,7} = 8,97\ с. \tag{2.71}$$

Задача 2.9. Вращение твердого тела вокруг оси задано уравнением $\varphi = 1,5t^2 - 4t$ (φ – угол поворота тела, откладывается против часовой стрелки). Определить характер вращения тела при $t_1 = 1\ c$ и $t_2 = 2\ c$, а также скорость и ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $R = 0,2\ м$.

Решение:

Угловая скорость тела:

$$\omega = \dot{\varphi} = 3t - 4. \tag{2.72}$$

При $t_1 = 1\ c$ $\omega_1 = -1\ рад/c$, значит, тело в данный момент времени вращается в сторону, противоположную отсчету угла φ, т.е. по часовой стрелке. При $t_2 = 2\ c$ $\omega_2 = 2\ рад/c$, следовательно, тело вращается против часовой стрелки.

Угловое ускорение тела:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 3\ рад/c^2. \tag{2.73}$$

Таким образом, $\varepsilon = const$, т.е. вращение тела равнопеременное. При $t_1 = 1\ c$ знаки ω и ε разные, значит, вращение замедленное, а при $t_2 = 2\ c$ знаки ω и ε одинаковые – вращение ускоренное.

Скорость точки:

$$\upsilon = \omega R, \tag{2.74}$$

и в искомые моменты времени составит

$$\upsilon_1 = |\omega_1| R = 0,2\ м/c, \quad \upsilon_2 = |\omega_2| R = 0,4\ м/c. \tag{2.75}$$

Центростремительное ускорение точки:

$$a_ц = \omega^2 R, \tag{2.76}$$

и в заданные моменты времени

$$a_{ц1} = \omega_1^2 R = 0,2\ м/c^2, \quad a_{ц2} = \omega_2^2 R = 0,8\ м/c^2. \tag{2.77}$$

Вращательное ускорение точки:

$$a_{вр} = \varepsilon R = 3 \cdot 0,2 = 0,6\ м/c^2. \tag{2.78}$$

Полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_ц^2 + a_{вр}^2}. \tag{2.79}$$

При $t_1 = 1\ c$:

$$a_1 = \sqrt{a_{ц1}^2 + a_{вр}^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,6^2} = 0,632\ м/c^2. \tag{2.80}$$

При $t_2 = 2\ c$:

$$a_2 = \sqrt{a_{ц2}^2 + a_{вр}^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1\ м/c^2. \tag{2.81}$$

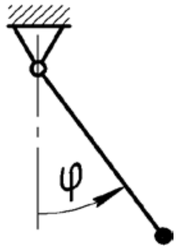

Рис. 2.5

Задача 2.10. Маятник (рис. 2.5) колеблется по закону

$$\varphi = \frac{4}{3}\cos\frac{3\pi t}{4}$$

(φ – в радианах, t – в секундах). Исследовать характер движения маятника за период и построить график изменения угловой скорости и углового ускорения.

Решение:

В уравнении колебаний маятника коэффициент перед t является круговой частотой:

$$k = \frac{3\pi}{4}. \quad (2.83)$$

Тогда период колебаний маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{8}{3}\ c. \quad (2.84)$$

Исследуем движение маятника за это время.

Угловая скорость маятника:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi t}{4}\right) = -\pi\sin\frac{3\pi t}{4}. \quad (2.85)$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -\pi\cdot\frac{3\pi}{4}\cos\frac{3\pi t}{4} = -\frac{3\pi^2}{4}\cos\frac{3\pi t}{4}. \quad (2.86)$$

Вычислим значения угла поворота, угловой скорости и углового ускорения через каждую $1/3$, а результаты занесем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Данные для построения графиков $\varphi = f(t)$, $\omega = f(t)$ и $\varepsilon = f(t)$

t, с	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	7/3	8/3
φ, рад	1,33	0,94	0	-0,94	-1,33	-0,94	0	0,94	1,33
ω, рад/с	0	-2,22	-3,14	-2,22	0	2,22	3,14	2,22	0
ε, рад/с^2	-7,4	-5,23	0	5,23	7,4	5,23	0	-5,23	-7,4

По полученным данным построим графики зависимости $\varphi = f(t)$, $\omega = f(t)$ и $\varepsilon = f(t)$ (рис. 2.6).

Исследуя графики, мы можем сказать, что в те моменты времени, когда угол φ принимает максимальные значения, угловое ускорение маятника также максимально, а угловая скорость равна нулю.

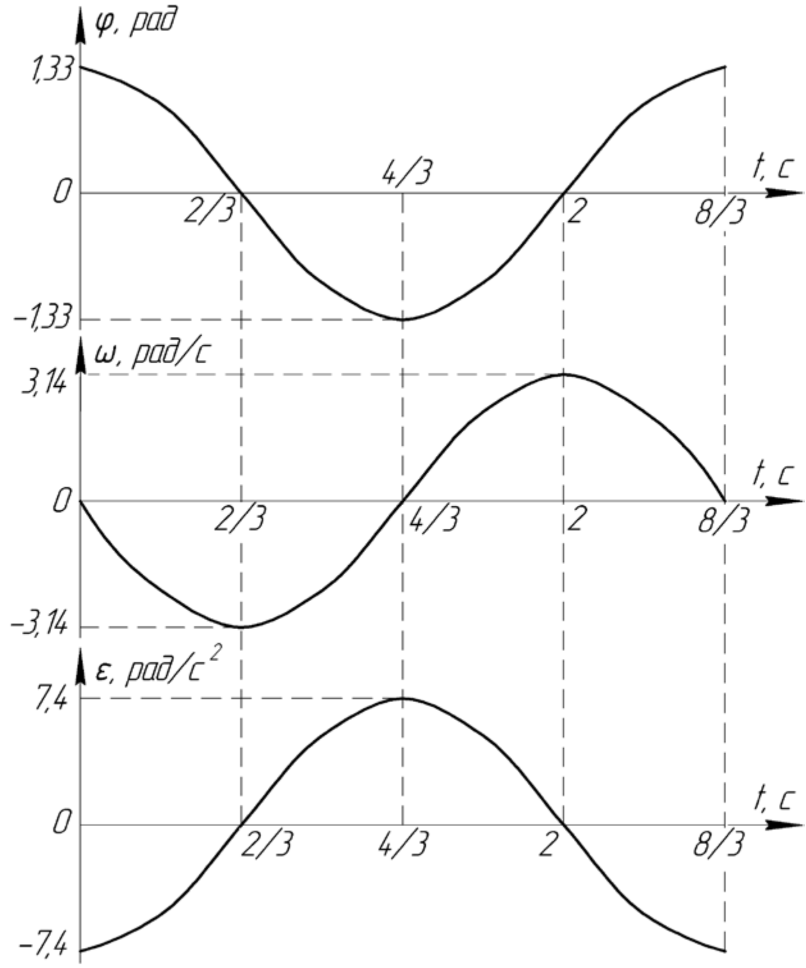

Рис. 2.6

По графику углового ускорения видно, что при $0 < t < 2/3$ и $4/3 < t < 2$ вращение маятника ускоренное, а при $2/3 < t < 4/3$ – вращение замедленное.

Задача 2.11. Вал вентилятора в период разгона вращается по закону

$$\varphi = 15\pi t + 3070\left(e^{-kt} - 1\right), \qquad (2.87)$$

где k – постоянная величина. Определить наибольшую частоту вращения вала, а также ускорение точки *M*, отстоящей от оси вращения на расстоянии $0{,}8\ м$ в момент времени $t = 0$, если начальная угловая скорость равна нулю. Определить время *T*, когда частота вращения вентилятора будет равна $n = 270\ об/мин$.

Решение:

Найдем закон изменения угловой скорости:

$$\omega = \dot{\varphi} = 15\pi - 3070ke^{-kt}. \qquad (2.88)$$

В момент пуска $t = 0$, $\omega = 0$, тогда:

$$0 = 15\pi - 3070k, \qquad (2.89)$$

откуда $k = 0,01535$.

Закон изменения угловой скорости будет выглядеть:

$$\omega = 15\pi - 3070 \cdot 0,01535 \cdot e^{-0,01535t}, \tag{2.90}$$

или

$$\omega = 47,1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0,01535t}}\right). \tag{2.91}$$

Угловая скорость примет максимальное значение при $t \to \infty$:

$$\frac{1}{e^{0,01535t}} \to 0, \quad \omega \to \omega_{\max}. \tag{2.92}$$

Тогда $\omega_{\max} = 47,1$ $рад/с$. Этой величине соответствует частота вращения:

$$n_{\max} = \frac{30\omega_{\max}}{\pi} = \frac{30 \cdot 47,1}{3,14} = 450 \ об/мин. \tag{2.93}$$

Определим время *T*, при котором частота вращения $n = 270$ $об/мин$. Для этого найдем соответствующую угловую скорость:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 270}{30} = 9\pi \ \ рад/с, \tag{2.94}$$

и подставим в уравнение (2.91):

$$9\pi = 47,1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0,01535T}}\right), \tag{2.95}$$

или

$$1 - \frac{1}{e^{0,01535T}} = 0,6. \tag{2.96}$$

Отсюда

$$e^{0,01535T} = 2,5, \tag{2.97}$$

$$0,01535T = \ln 2,5, \tag{2.98}$$

и окончательно:

$$T = \frac{\ln 2,5}{0,01535} = \frac{0,92}{0,01535} = 60 \ с. \tag{2.99}$$

Найдем ускорение точки *M* при $t = 0$. Т.к. в этот момент $\omega = 0$, то $a_ц = \omega^2 R = 0$. Следовательно:

$$a = a_{вр} = \varepsilon R, \tag{2.100}$$

где *R* – расстояние от точки *M* до оси вращения.

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = 3070 \cdot 0,01535^2 \cdot e^{-0,01535t} = 0,72e^{-0,01535t}, \tag{2.101}$$

и при $t = 0$ составит $\varepsilon = 0,723$ $рад/с^2$. Тогда ускорение точки:

$$a = 0,723 \cdot 0,8 = 0,58 \ м/с^2. \tag{2.102}$$

3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Плоским (плоскопараллельным) называется такое движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоское движение рассматривают как сложное движение, состоящее из поступательного движения тела вместе с полюсом и вращательного движения тела вокруг полюса. Причем вращательная часть от выбора полюса не зависит.

1. Определение скоростей точек. В зависимости от условий задачи применяют следующие три способа.

а) С помощью теоремы о сложении скоростей. *Скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\bar{\upsilon}_A$ и скорости точки B вокруг полюса $\bar{\upsilon}_{BA}$:*

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}. \tag{3.1}$$

За полюс *A* принимают ту точку плоской фигуры, скорость которой известна. Для определения $\bar{\upsilon}_B$ вектор $\bar{\upsilon}_{BA}$ направляют перпендикулярно *AB*, т.е. движение точки *B* рассматривается как движение по окружности радиуса *AB* с центром в точке *A* (рис. 3.1, *а*). Вектор $\bar{\upsilon}_A$ переносят в точку *B*. Затем находят геометрическую сумму векторов $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_{BA}$ по правилу параллелограмма.

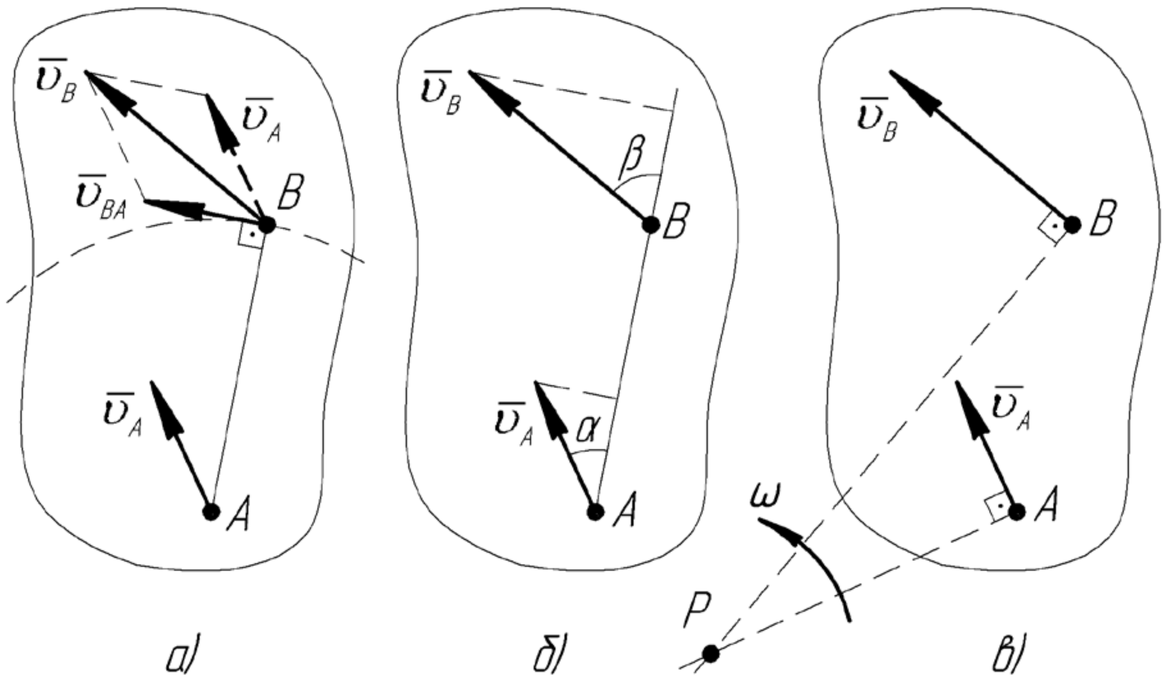

Рис. 3.1

б) С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на соединяющую их прямую. *Проекции скоростей двух точек A и B плоской фигуры на соединяющую их прямую равны:*

$$\upsilon_A \cos\alpha = \upsilon_B \cos\beta\,, \tag{3.2}$$

где α и β – соответственно углы наклона векторов $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ к прямой AB (рис. 3.1, *б*).

в) С помощью мгновенного центра скоростей плоской фигуры. *Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*

Для определения МЦС плоской фигуры из точек A и B проводят две прямые, перпендикулярно скоростям этих точек – $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ (рис. 3.1, *в*). Пересечение этих прямых – точка P – и будет являться МЦС. Если теперь принять МЦС за полюс, то в данный момент времени движение фигуры можно рассматривать как вращательное, а скорости точек плоской фигуры связаны зависимостью:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP} = \omega, \tag{3.3}$$

где AP и BP – расстояния от МЦС до точек A и B соответственно; ω – угловая скорость плоской фигуры.

Частные случаи определения положения МЦС:

1) Векторы $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ параллельны друг другу и перпендикулярны прямой AB. Положение МЦС определяется так, как показано на рис. 3.2, *а* (если $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ направлены в одну сторону) или на рис. 3.2, *б* (если $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ направлены в противоположные стороны). При этом значения υ_A и υ_B связаны зависимостью (3.3).

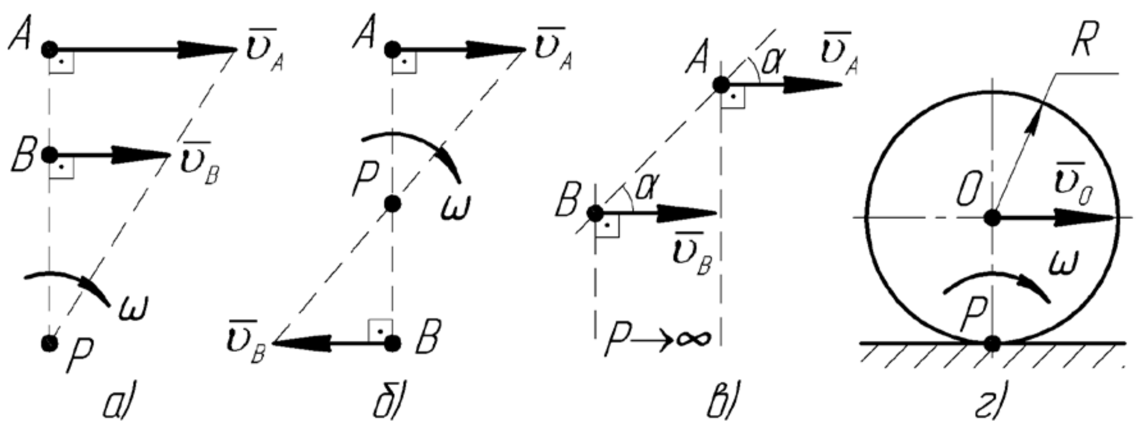

Рис. 3.2

2) Векторы $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ параллельны друг другу, но неперпендикулярны прямой AB (рис. 3.2, *в*). В этом случае МЦС находится в бесконечности, а угловая скорость тела равна нулю ($\omega = 0$):

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_A}{\infty} = 0\,. \tag{3.4}$$

Такое движение тела называется *мгновенно-поступательным*, т.к.

скорости всех точек тела равны между собой ($\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_B$). Необходимо также отметить, что при таком движении ускорения всех точек тела не будут равны между собой, как при поступательном движении тела.

3) При качении катка (колеса) по поверхности без скольжения МЦС находится в точке *P* соприкосновения катка с поверхностью, а угловая скорость катка будет определяться по формуле:

$$\omega = \frac{\upsilon_O}{R}, \tag{3.5}$$

где υ_O – скорость центра катка, *R* – радиус катка (рис. 3.2, *г*). Уравнение (3.3) в этом случае также справедливо.

2. Определение ускорений точек. При решении задач применяют два способа.

а) С помощью теоремы о сложении ускорений. *Ускорение точки B плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса* $\overline{a}_A$ *и ускорения точки B вокруг полюса* $\overline{a}_{BA}$*:*

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}. \tag{3.6}$$

За полюс *A* принимают ту точку плоской фигуры, ускорение которой известно. Т.к. движение точки *B* вокруг *A* вращательное, то:

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{вр} + \overline{a}_{BA}^{ц}, \tag{3.7}$$

где $\overline{a}_{BA}^{вр}$ – вращательное ускорение точки *B* при ее движении вокруг полюса *A*; направляется перпендикулярно отрезку *AB* в ту сторону, куда направлено угловое ускорение *ε* фигуры (рис. 3.3*, а*);

$\overline{a}_{BA}^{ц}$ – центростремительное ускорение точки *B* при ее вращении вокруг полюса *A*; направляется к центру вращения, т.е. к полюсу *A*.

Таким образом, ускорение точки *A* будет равно:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{вр} + \overline{a}_{BA}^{ц}. \tag{3.8}$$

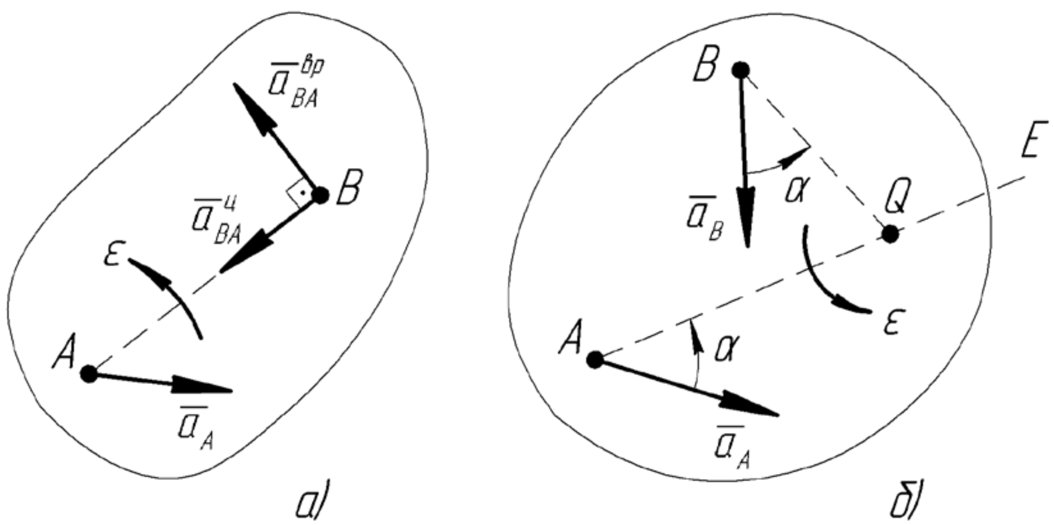

Рис. 3.3

Если точка A движется по какой-то кривой линии (например, окружности), то:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^{вр} + \overline{a}_{BA}^{ц}, \qquad (3.9)$$

где $\overline{a}_A^n$ и $\overline{a}_A^\tau$ – нормальное и касательное ускорения точки A соответственно.

б) С помощью мгновенного центра ускорений. *Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – это точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.*

Для определения МЦУ плоской фигуры необходимо знать:

- ускорение какой-нибудь точки, например, точки A;
- угловую скорость ω и угловое ускорение ε фигуры.

Вычисляют угол α и расстояние AQ от точки A до МЦУ:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (3.10)$$

От точки A под углом α к вектору $\overline{a}_A$ проводим прямую AE (рис. 3.3, *б*). Угол α откладывается в направлении углового ускорения. На прямой AE откладываем отрезок AQ, точка Q и будет мгновенным центром ускорений. Ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращательным вокруг точки Q, т.е. например, для определения ускорения точки B составляют пропорцию:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad (3.11)$$

где AQ и BQ – расстояния от МЦУ до точек A и B соответственно.

Задача 3.1. Стержневой механизм состоит из четырех стержней (рис. 3.4, *а*), причем стержень O_1A вращается с угловой скоростью ω_1, а стержень O_2B – с угловой скоростью ω_2. Определить скорость точки C для указанного положения механизма, если $O_1A = b\sqrt{3}$, $O_2B = b$.

Решение:

Учитывая, что точки A и B принадлежат стержням, которые совершают вращательное движение, их скорости составят:

$$\upsilon_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 b\sqrt{3}, \qquad (3.12)$$

$$\upsilon_B = \omega_2 \cdot O_2A = \omega_2 b. \qquad (3.13)$$

Векторы $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ направим перпендикулярно соответствующим стержням в сторону вращения (рис. 3.4, *б*).

Стержень AC совершает плоское движение, следовательно, по теореме о сложении скоростей:

$$\overline{\upsilon}_C = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{CA}. \qquad (3.14)$$

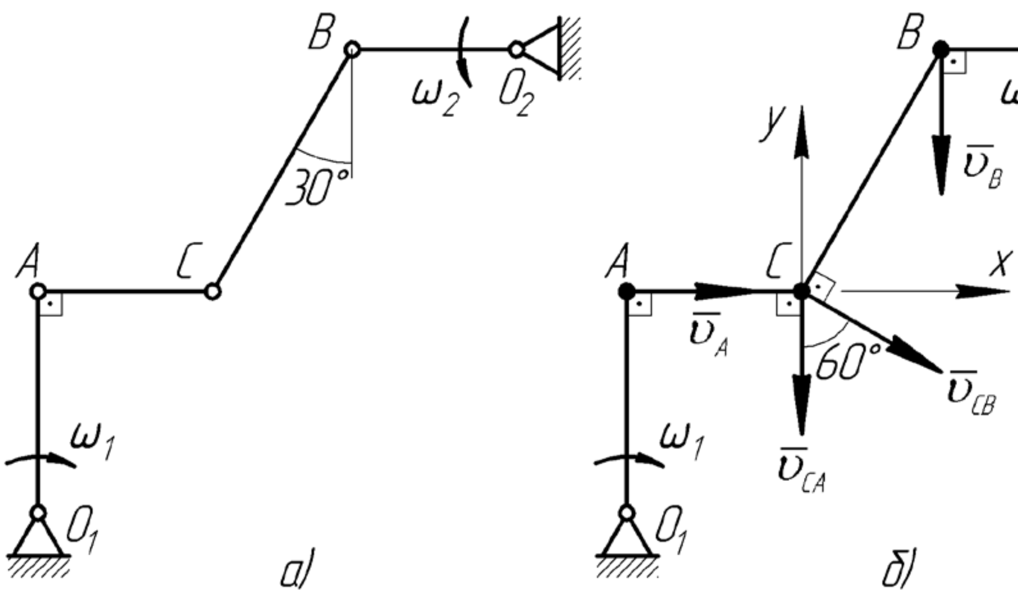

Рис. 3.4

Но, с другой стороны, точка *C* также принадлежит и стержню *BC*, также совершающему плоское движение, значит:

$$\bar{\upsilon}_C = \bar{\upsilon}_B + \bar{\upsilon}_{CB}. \tag{3.15}$$

Векторы $\bar{\upsilon}_{CA}$ и $\bar{\upsilon}_{CB}$ будут перпендикулярны стержням *AC* и *BC* соответственно, однако, в какую сторону направлены эти векторы – неизвестно. Поэтому зададим направления векторов так, как показано на рис. 3.4, *б*.

Также неизвестны значения υ_{CA} и υ_{CB}. Чтобы их найти, приравняем правые части уравнений (3.14) и (3.15):

$$\bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{CA} = \bar{\upsilon}_B + \bar{\upsilon}_{CB}. \tag{3.16}$$

Через точку *C* проведем координатные оси и спроецируем уравнение (3.16) на ось *x*:

$$\upsilon_A = \upsilon_{CB} \sin 60°, \tag{3.17}$$

и на ось *y*:

$$-\upsilon_{CA} = -\upsilon_B - \upsilon_{CB} \cos 60°. \tag{3.18}$$

Из уравнения (3.17) можем найти значение скорости точки *C* при ее вращении относительно *B*:

$$\upsilon_{CB} = \frac{\upsilon_A}{\sin 60°} = \frac{\omega_1 b\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\omega_1 b. \tag{3.19}$$

Подставляя данное значение в уравнение (3.18), найдем скорость точки *C* при вращении вокруг полюса *A*:

$$\upsilon_{CA} = \upsilon_B + \upsilon_{CB} \cos 60° = \omega_2 b + 2\omega_1 b \cdot \frac{1}{2} = b\left(\omega_1 + \omega_2\right). \tag{3.20}$$

Значения υ_{CA} и υ_{CB} – положительные, значит, направления векторов $\bar{\upsilon}_{CA}$ и $\bar{\upsilon}_{CB}$ были выбраны верно.

Для определения модуля скорости точки C, воспользуемся уравнением (3.14). Т.к. между векторами $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_{CA}$ прямой угол, то скорость точки C найдем по теореме Пифагора:

$$\upsilon_C = \sqrt{\upsilon_A^2 + \upsilon_{CA}^2} = \sqrt{3\omega_1^2 b^2 + \left(\omega_1 + \omega_2\right)^2 b^2} = b\sqrt{4\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2}\,. \quad (3.21)$$

Задача 3.2. Кривошип OA механизма вращается с угловой скоростью ω_0 (рис. 3.5, *а*). Определить скорости точек B и C, а также угловую скорость стержня BD в положении, показанном на рисунке. Длины стержней: $OA = AB = a$, $BD = a\sqrt{3}$; углы: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

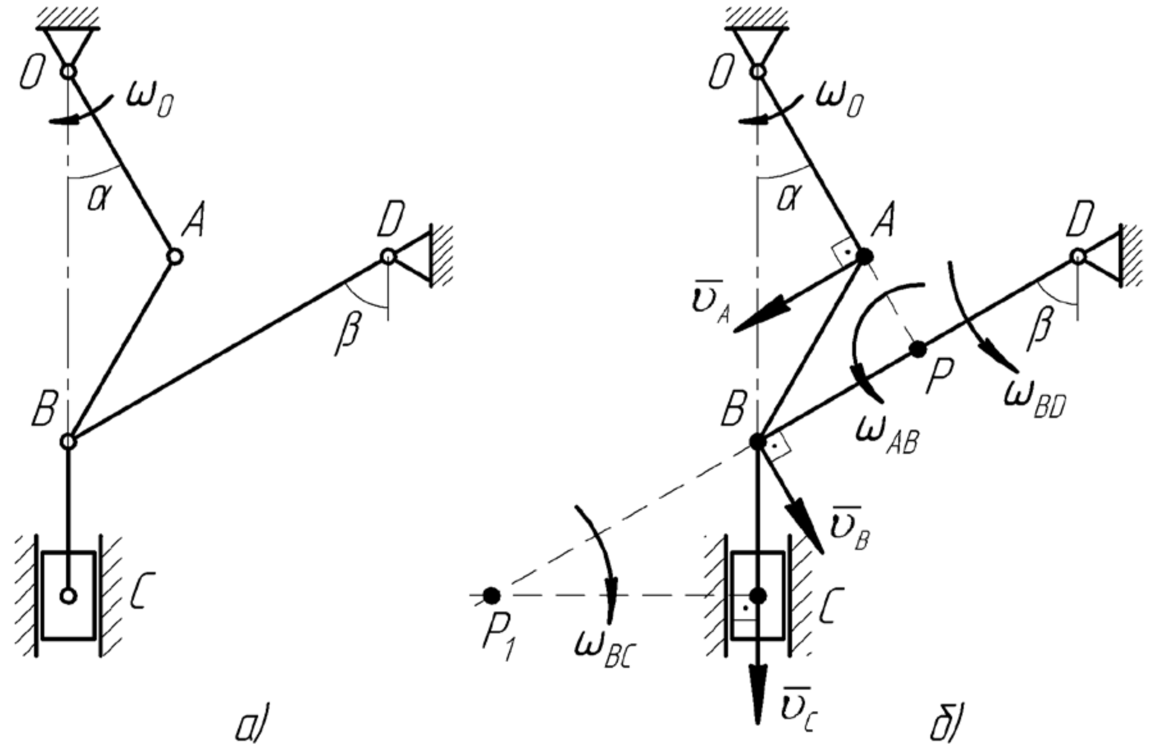

Рис. 3.5

Решение:

Стержень OA совершает вращательное движение, следовательно, значение скорости точки A:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 a\,, \quad (3.22)$$

а вектор $\bar{\upsilon}_A$ будет направлен перпендикулярно OA в сторону вращения (рис. 3.5, *б*).

Стержень BD также совершает вращательное движение, поэтому вектор $\bar{\upsilon}_B$ будет перпендикулярен BD. Отсюда можем найти положение МЦС для звена AB, он находится в точке P пересечения перпендикуляров, проведенных их точек A и B к векторам $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$.

Теперь можем записать пропорцию:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}, \tag{3.23}$$

откуда

$$\upsilon_B = \upsilon_A \cdot \frac{BP}{AP}. \tag{3.24}$$

Т.к. $OA = AB$, значит треугольник OAB – равнобедренный, а $\angle OBA = \angle BOA = \alpha$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABP:

$$\angle ABP = \beta - \alpha = 60° - 30° = 30°, \tag{3.25}$$

$$\frac{BP}{AP} = \operatorname{ctg} ABP = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}. \tag{3.26}$$

Значение скорости точки B:

$$\upsilon_B = \omega_0 a \sqrt{3}. \tag{3.27}$$

Аналогичный результат получим, если воспользуемся теоремой о проекциях скоростей $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ на прямую AB:

$$\upsilon_A \cos 30° = \upsilon_B \cos 60°, \tag{3.28}$$

$$\upsilon_B = \upsilon_A \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \upsilon_A \operatorname{ctg} 30° = \omega_0 a \sqrt{3}. \tag{3.29}$$

Далее определим направления вращения стержня AB (на рисунке направления вращения стержней обозначены дуговыми стрелками), направление вектора $\bar{\upsilon}_B$ и направление вращения стержня BD.

Затем находим угловую скорость стержня BD:

$$\omega_{BD} = \frac{\upsilon_B}{BD} = \frac{\omega_0 a \sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \omega_0. \tag{3.30}$$

Для нахождения скорости точки C найдем положение МЦС стержня BC. Т.к. ползун C движется в направляющих, то вектор $\bar{\upsilon}_C$ направлен вертикально, а МЦС будет находиться в точке P_1 – на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек B и C к векторам $\bar{\upsilon}_B$ и $\bar{\upsilon}_C$. Запишем пропорцию:

$$\frac{\upsilon_B}{BP_1} = \frac{\upsilon_C}{CP_1}, \tag{3.31}$$

откуда

$$\upsilon_C = \upsilon_B \cdot \frac{CP_1}{BP_1}. \tag{3.32}$$

Учитывая, что в прямоугольном треугольнике BP_1C:

$$\frac{CP_1}{BP_1} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.33}$$

найдем значение скорости точки C:

$$\upsilon_C = \omega_0 a\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\omega_0 a\,. \qquad (3.34)$$

Также покажем на рисунке направление вектора $\bar{\upsilon}_C$ и направление вращения стержня *BC*.

Задача 3.3. Труба поднимается с помощью талевого ступенчатого барабана *A* (рис. 3.6), вал которого совершает 10 $об/мин$. Определить скорость υ_O подъема трубы, если $r = 0{,}05\,м$, $R = 0{,}15\,м$; участки *BE* и *CD* тросов – вертикальные.

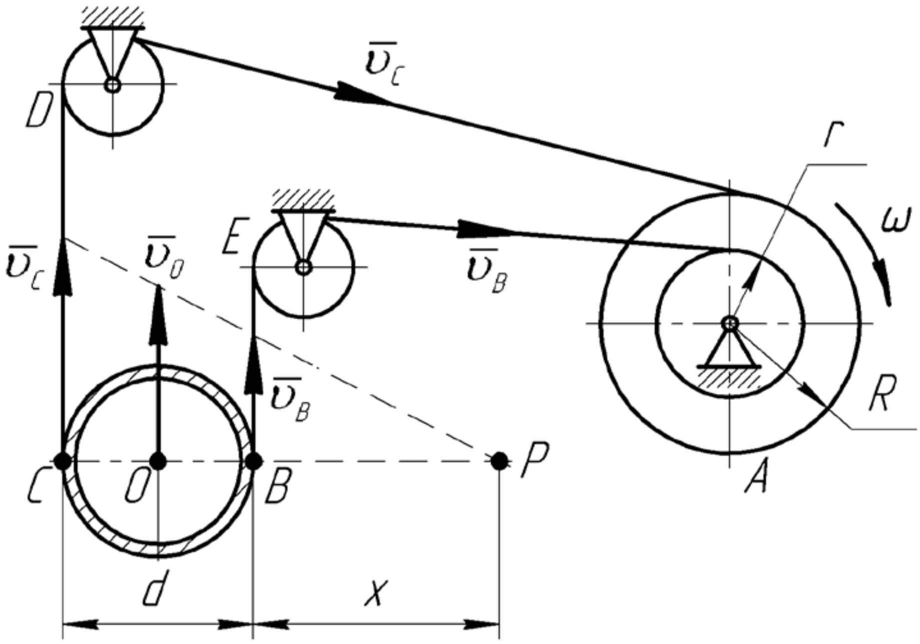

Рис. 3.6

Решение:

Угловая скорость ступенчатого барабана:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14\cdot 10}{30} = 1{,}05\ \ рад/с\,. \qquad (3.35)$$

Скорости точек *B* и *C* троса:

$$\upsilon_B = \omega R = 1{,}05\cdot 0{,}15 = 0{,}1575\ \ м/с\,, \qquad (3.36)$$

$$\upsilon_C = \omega r = 1{,}05\cdot 0{,}05 = 0{,}0525\ \ м/с\,. \qquad (3.37)$$

Т.к. векторы $\bar{\upsilon}_B$ и $\bar{\upsilon}_C$ параллельны и перпендикулярны отрезку *BC*, МЦС трубы будет находиться в точке *P* (рис. 3.6), а значения скоростей будут взаимосвязаны пропорцией:

$$\frac{\upsilon_B}{BP} = \frac{\upsilon_C}{CP}. \qquad (3.38)$$

Обозначив диаметр трубы *d*, а расстояние $BP = x$, получим:

$$\frac{\upsilon_B}{x} = \frac{\upsilon_C}{x+d}, \qquad (3.39)$$

откуда

$$x = \frac{\upsilon_B d}{\upsilon_C - \upsilon_B}. \tag{3.40}$$

Скорость точки O найдем из отношения:

$$\frac{\upsilon_B}{BP} = \frac{\upsilon_O}{OP}, \tag{3.41}$$

где $OP = x + \dfrac{d}{2}$.

Тогда:

$$\upsilon_O = \upsilon_B \cdot \frac{OP}{BP} = \upsilon_B \cdot \left(x + \frac{d}{2} \right) \Big/ x = \upsilon_B \cdot \left(1 + \frac{d}{2x} \right). \tag{3.42}$$

Подставляя сюда выражение (3.40), получим:

$$\upsilon_O = \upsilon_B \cdot \left(1 + \frac{d \cdot (\upsilon_C - \upsilon_B)}{2\upsilon_B d} \right) = \frac{\upsilon_B + \upsilon_C}{2}. \tag{3.43}$$

Такой же результат можно было получить графически: т.к. точка O – середина отрезка BC, из подобия соответствующих треугольников скорость точки O будет находиться как среднее арифметическое скоростей точек B и C.

Окончательно скорость подъема трубы:

$$\upsilon_O = \frac{0{,}1575 + 0{,}0525}{2} = 0{,}105 \ \text{м/с}. \tag{3.44}$$

Задача 3.4. В механизме продольно-строгального станка (рис. 3.7, *а*) кривошип OA длиной r вращается с угловой скоростью ω_0. Определить величину скорости штока BE, если $AC = 2r$, $DC : BC = 1:2$, отрезок OC при данном положении механизма параллелен BE.

Решение:

Кривошип OA совершает вращательное движение, поэтому скорость точки A:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 r. \tag{3.45}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно OA в сторону вращения кривошипа (рис. 3.7, *б*).

Чтобы определить положение МЦС звена AC, необходимо знать направление вектора $\bar{\upsilon}_C$. Для этого рассмотрим звено BK. Шток BE двигается в направляющих, следовательно, вектор $\bar{\upsilon}_B$ будет направлен горизонтально. Звено BK находится в направляющей втулке D, значит, вектор $\bar{\upsilon}_D$ скорости точки звена, совпадающей в данный момент времени с втулкой D будет направлен вдоль звена BK.

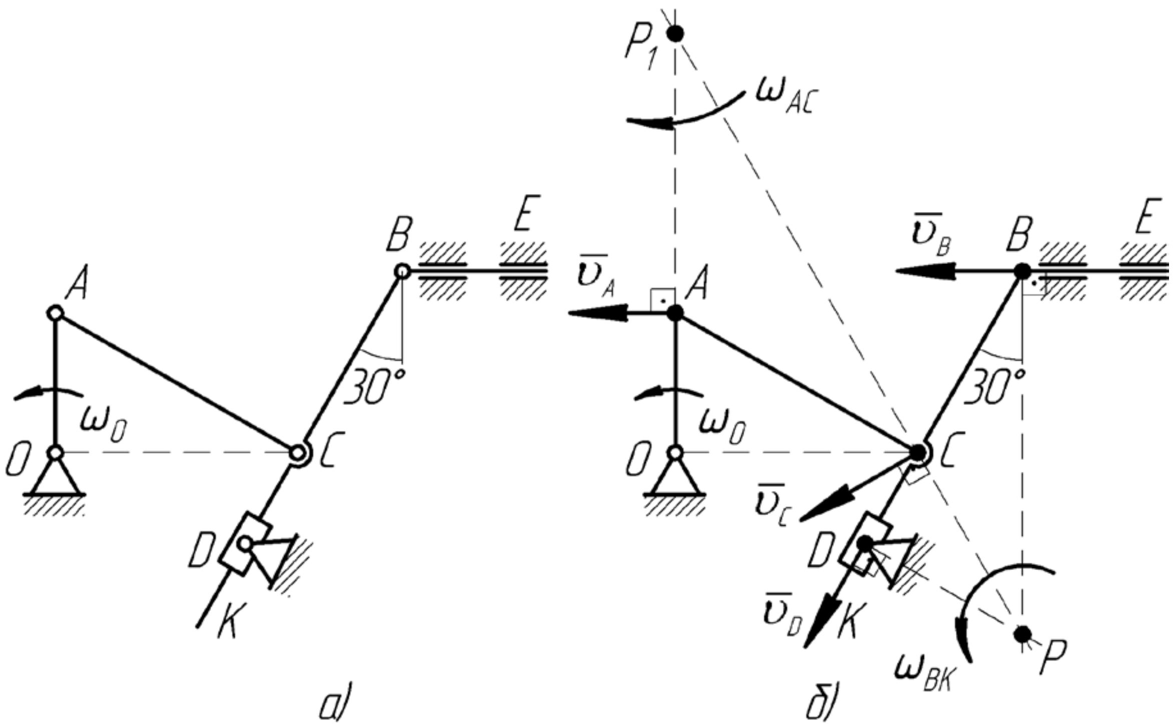

Рис. 3.7

Тогда МЦС звена *BK* будет находиться в точке *P* пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *B* и *D* к векторам $\bar{\upsilon}_B$ и $\bar{\upsilon}_D$ соответственно, а вектор $\bar{\upsilon}_C$ будет перпендикулярен *CP*. Из точки *A* проведем прямую, перпендикулярную к вектору $\bar{\upsilon}_A$, и продолжим прямую *CP*. На пересечении двух этих прямых и будет находиться МЦС звена *AC* – точка P_1. Зная положение МЦС для каждого звена, составим пропорции:

$$\frac{\upsilon_A}{AP_1} = \frac{\upsilon_C}{CP_1}, \quad \frac{\upsilon_C}{CP} = \frac{\upsilon_B}{BP}. \tag{3.46}$$

Выразим из этих уравнений:

$$\upsilon_C = \upsilon_A \cdot \frac{CP_1}{AP_1}, \quad \upsilon_C = \upsilon_B \cdot \frac{CP}{BP}, \tag{3.47}$$

приравняем правые части и выразим:

$$\upsilon_B = \upsilon_A \cdot \frac{CP_1}{AP_1} \cdot \frac{BP}{CP}. \tag{3.48}$$

Найдем неизвестные расстояния. В треугольнике *DBP*:

$$DP = DB\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} DB. \tag{3.49}$$

Учитывая, что $DC : BC = 1 : 2$ или $DB = 3DC$:

$$DP = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3DC = \sqrt{3}DC. \tag{3.50}$$

Тогда в треугольнике *CDP* по теореме Пифагора:

$$CP = \sqrt{DC^2 + DP^2} = 2DC. \tag{3.51}$$

Т.к. $CP = BC = 2DC$, то треугольник BPC – равнобедренный, а углы $\angle CBP = \angle CP_1A = 30°$.

В прямоугольном треугольнике OAC: $AC = 2OA$, $\angle OAC = 60°$, значит, треугольник AP_1C – тоже равнобедренный ($\angle P_1AC = 120°$, $\angle ACP_1 = 30°$).

Тогда искомые расстояния составят:

$$AP_1 = AC = 2r, \tag{3.52}$$

$$CP_1 = \sqrt{AC^2 + \left(AP_1\right)^2 - 2 \cdot AC \cdot AP_1 \cdot \cos 120°} =$$

$$= \sqrt{4r^2 + 4r^2 + 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos 60°} = 2r\sqrt{3}, \tag{3.53}$$

$$CP = 2DC, \tag{3.54}$$

$$BP = \sqrt{CP^2 + BC^2 - 2 \cdot CP \cdot BC \cdot \cos 120°} = 2DC\sqrt{3}. \tag{3.55}$$

Подставляя данные выражения в уравнение (3.48), найдем значение скорости точки B, а, значит, и скорость штока BE:

$$\upsilon_B = \upsilon_A \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2r} \cdot \frac{2DC\sqrt{3}}{2DC} = 3\upsilon_A = 3\omega_0 r. \tag{3.56}$$

Чтобы определить направление вектора $\overline{\upsilon}_B$, на рисунке последовательно проставляем направления найденных скоростей точек и направления вращений звеньев.

Задача 3.5. Механизм пилонасекательной машины (рис. 3.8) имеет размеры: $OA = r$, $AB = a$, $BC = 2a$, $CD = R$, $DE = R\sqrt{3}$. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_0. Определить угловые скорости звеньев механизма и скорость точки E в указанном положении механизма.

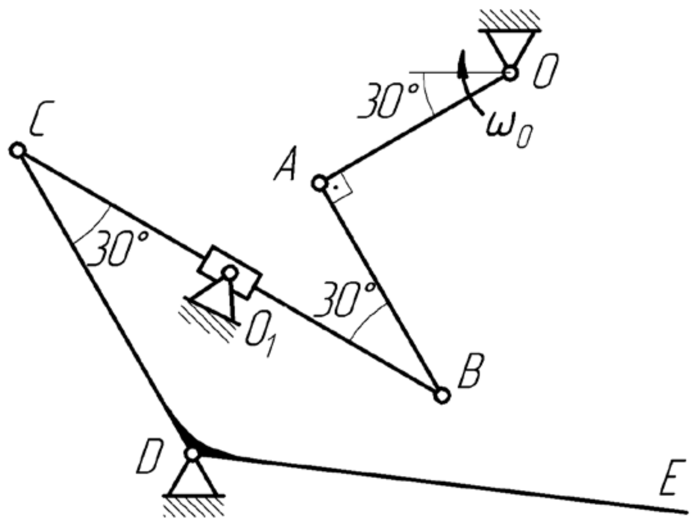

Рис. 3.8

Решение:

Кривошип *OA* совершает вращательное движение, поэтому скорость точки *A*:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 r\,. \tag{3.57}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно *OA* в сторону вращения кривошипа (рис. 3.9).

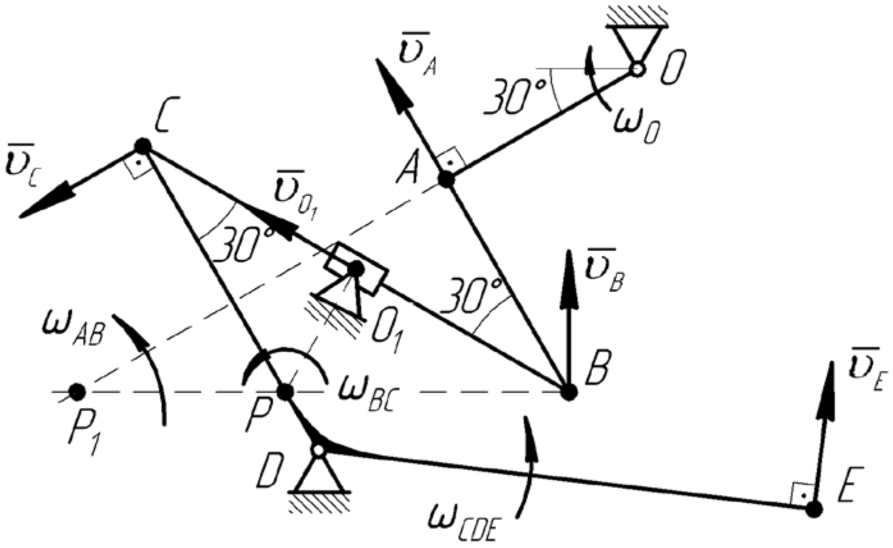

Рис. 3.9

Найдем мгновенные центры скоростей звеньев *AB* и *BC*.

Звено *CDE* совершает вращательное движение, следовательно, вектор $\bar{\upsilon}_C$ будет перпендикулярен *CD*. В то же время, вектор $\bar{\upsilon}_{O_1}$ скорости точки звена *BC*, совпадающей в данный момент времени с качающейся втулкой O_1, будет направлен вдоль *BC*. Значит, МЦС звена *BC* будет находиться в точке *P* – на пересечении *CD* с прямой, проведенной из точки O_1 перпендикулярно вектору $\bar{\upsilon}_{O_1}$.

Тогда вектор $\bar{\upsilon}_B$ будет перпендикулярен *BP*, а МЦС звена *AB* будет находиться в точке P_1 – на пересечении прямой *BP* с прямой проведенной из точки *A* перпендикулярно вектору $\bar{\upsilon}_A$.

Зная положение МЦС звена *AB*, найдем его угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP_1}. \tag{3.58}$$

В треугольнике ABP_1:

$$AP_1 = AB\,\mathrm{tg}\,60° = a\sqrt{3}\,. \tag{3.59}$$

Тогда угловая скорость звена *AB*:

$$\omega_{AB} = \frac{\omega_0 r}{a\sqrt{3}}\,. \tag{3.60}$$

Скорость точки *B*:

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot BP_1. \tag{3.61}$$

Учитывая, что в треугольнике ABP_1

$$BP_1 = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2a, \tag{3.62}$$

окончательно найдем:

$$\upsilon_B = \frac{\omega_0 r}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0 r. \tag{3.63}$$

Учитывая направление вектора $\bar{\upsilon}_A$, покажем на рисунке направление вращения звена *AB* и направление вектора $\bar{\upsilon}_B$.

Зная положение МЦС звена *BC*, найдем его угловую скорость:

$$\omega_{BC} = \frac{\upsilon_B}{BP}. \tag{3.64}$$

В треугольнике O_1BP:

$$BP = \frac{O_1B}{\cos 30^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}. \tag{3.65}$$

Тогда угловая скорость звена *BC*:

$$\omega_{BC} = \frac{2\omega_0 r \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2a} = \frac{\omega_0 r}{a}. \tag{3.66}$$

Т.к. треугольник *CBP* – равнобедренный ($CP = BP = 2a/\sqrt{3}$), скорости точек *B* и *C* будут равны:

$$\upsilon_C = \omega_{BC} \cdot CP = \upsilon_B = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0 r. \tag{3.67}$$

Учитывая направление вектора $\bar{\upsilon}_B$, показываем направление вращения звена *BC* и направление вектора $\bar{\upsilon}_C$.

Угловая скорость звена *CDE*:

$$\omega_{CDE} = \frac{\upsilon_C}{CD} = \frac{2\omega_0 r}{\sqrt{3}R}. \tag{3.68}$$

Скорость точки *E*:

$$\upsilon_E = \omega_{CDE} \cdot DE = 2\omega_0 r. \tag{3.69}$$

Также показываем на рисунке направление вращения звена *CDE* и вектор $\bar{\upsilon}_E$.

Задача 3.6. Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа *OA*, шатуна *AB* и поршня *B*, который перемещается в вертикальных направляющих (рис. 3.10, *а*). В данный момент времени кривошип и шатун взаимно перпендикулярны. Угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 10 \ рад/с$, его угловое ускорение $\varepsilon_0 = 2 \ рад/с^2$. Определить для данного положения механизма угловую скорость и угловое ускорение шатуна *AB*, а также скорость и ускорение поршня *B*, если $OA = 20\ см$, $AB = 30\ см$.

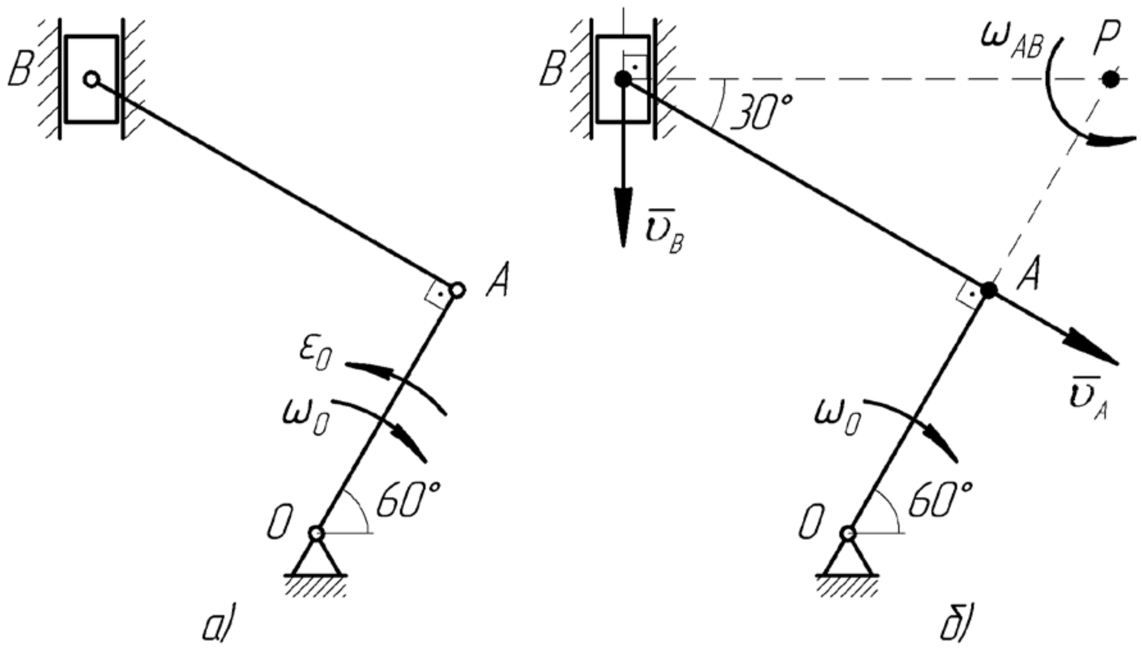

Рис. 3.10

Решение:

1) Кривошип *OA* совершает вращательное движение, значит, скорость точки *A* будет равна:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 0,2 = 2\ м/с. \tag{3.70}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно *OA* в сторону вращения кривошипа (рис. 3.10, *б*).

Т.к. поршень *B* движется в направляющих, то вектор $\bar{\upsilon}_B$ будет направлен вертикально (либо вверх, либо вниз). МЦС шатуна *AB* будет находиться в точке *P* – на пересечении двух перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *B* к векторам $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ соответственно.

Составим пропорцию:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}, \tag{3.71}$$

откуда

$$\upsilon_B = \upsilon_A \cdot \frac{BP}{AP}. \tag{3.72}$$

В прямоугольном треугольнике *ABP*:

$$\frac{AP}{BP} = \sin 30°. \tag{3.73}$$

Тогда скорость поршня *B* будет равна:

$$\upsilon_B = \frac{\upsilon_A}{\sin 30°} = 2 \cdot 2 = 4\ м/с. \tag{3.74}$$

Учитывая, что в треугольнике ABP расстояние $AP = AB\,\mathrm{tg}\,30°$, найдем угловую скорость шатуна AB:

$$\omega_B = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_A}{AB\,\mathrm{tg}\,30°} = \frac{2}{0{,}3 \cdot 0{,}577} = 11{,}55\ \ рад/с. \tag{3.75}$$

По направлению вектора $\overline{\upsilon}_A$ определим, что вращение шатуна AB будет происходить против часовой стрелки, а вектор $\overline{\upsilon}_B$ будет направлен вертикально вниз.

2) Ускорение поршня B будет равно:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^{вр} + \overline{a}_{BA}^{ц}. \tag{3.76}$$

Нормальное ускорение точки A, принимаемой за полюс:

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20\ \ м/с^2. \tag{3.77}$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ будет направлен от точки A к точке O (рис. 3.11).

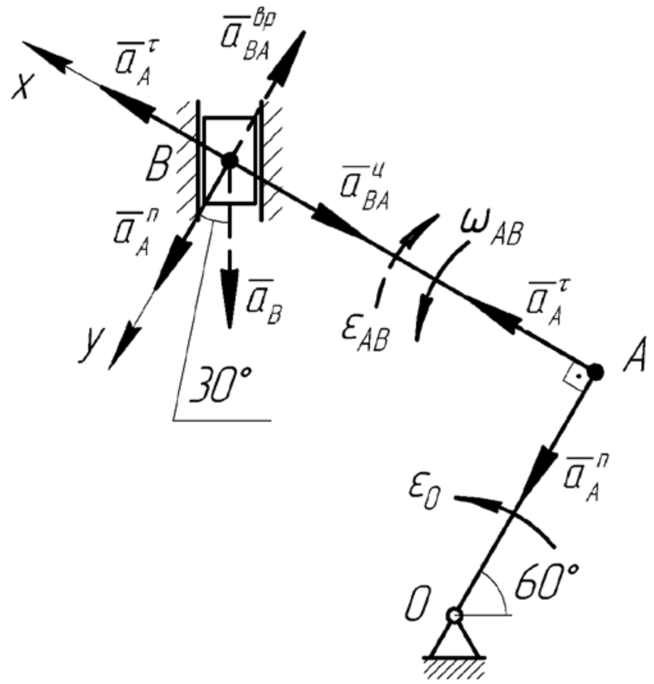

Рис. 3.11

Касательное ускорение точки A:

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\ \ м/с^2. \tag{3.78}$$

Вектор $\overline{a}_A^\tau$ направляем перпендикулярно OA в сторону углового ускорения.

Центростремительное ускорение поршня B при его вращении относительно полюса A:

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 11{,}55^2 \cdot 0{,}3 = 40\ \ м/с^2. \tag{3.79}$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^{ц}$ направлен от точки B к полюсу A.

Вращательное ускорение точки B вокруг точки A:

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \tag{3.80}$$

В этом уравнении неизвестно значение углового ускорения ε_{AB} шатуна. Для определения неизвестных величин поступим следующим образом.

Примем направление углового ускорения ε_{AB} противоположным направлению угловой скорости ω_{AB} (рис. 3.11). В соответствии с выбранным направлением на рисунке покажем вектор $\overline{a}_{BA}^{вр}$, он перпендикулярен *AB* и направлен в сторону углового ускорения. Также на рисунке изобразим вектор $\overline{a}_B$ скорости поршня. Т.к. поршень *B* перемещается в направляющих, то его ускорение будет направлено вертикально (либо вверх, либо вниз). Принимаем, что вектор $\overline{a}_B$ направлен вниз. На рис. 3.11 все векторы, направление которых точно неизвестно, показаны штриховой линией.

Из точки *A* перенесем в точку *B* векторы $\overline{a}_A^n$ и $\overline{a}_A^\tau$. Через точку *B* проведем координатные оси и спроецируем уравнение (3.76) на эти оси:

$$\text{- на ось } x \quad -a_B \sin 30° = a_A^\tau - a_{BA}^{ц}, \tag{3.81}$$

$$\text{- на ось } y \quad a_B \cos 30° = a_A^n - a_{BA}^{вр}. \tag{3.82}$$

Из первого уравнения найдем ускорение поршня *B*:

$$a_B = \frac{a_{BA}^{ц} - a_A^\tau}{\sin 30°} = \frac{40 - 0,4}{0,5} = 79,2 \ м/с^2 . \tag{3.83}$$

Из второго уравнения определим вращательное ускорение поршня *B* вокруг точки *A*:

$$a_{BA}^{вр} = a_A^n - a_B \cos 30° = 20 - 79,2 \cdot 0,866 = -48,6 \ м/с^2 . \tag{3.84}$$

Т.к. значение a_B положительно, то направление вектора $\overline{a}_B$ совпадает с выбранным. Знак «минус» в значении $a_{BA}^{вр}$ показывает, что направление вектора $\overline{a}_{BA}^{вр}$ (а, следовательно, и направление углового ускорения ε) противоположно выбранному.

Угловое ускорение шатуна *AB* найдем из уравнения (3.80):

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{48,6}{0,3} = 162 \ рад/с^2 . \tag{3.85}$$

Задача 3.7. В кривошипно-ползунном механизме кривошип *OA* вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.12, *а*). Найти величину и направление ускорения точки *M* шатуна *AB*, если: $OA = r$, $AB = l$,
$OA \perp BO$, $AC \square OB$, $BC \square OA$, $CM \perp AB$.

Решение:

Т.к. кривошип *OA* вращается относительно точки *O*, вектор $\overline{\upsilon}_A$ скорости точки *A* направлен перпендикулярно *OA* в сторону вращения кривошипа (рис. 3.12, *а*).

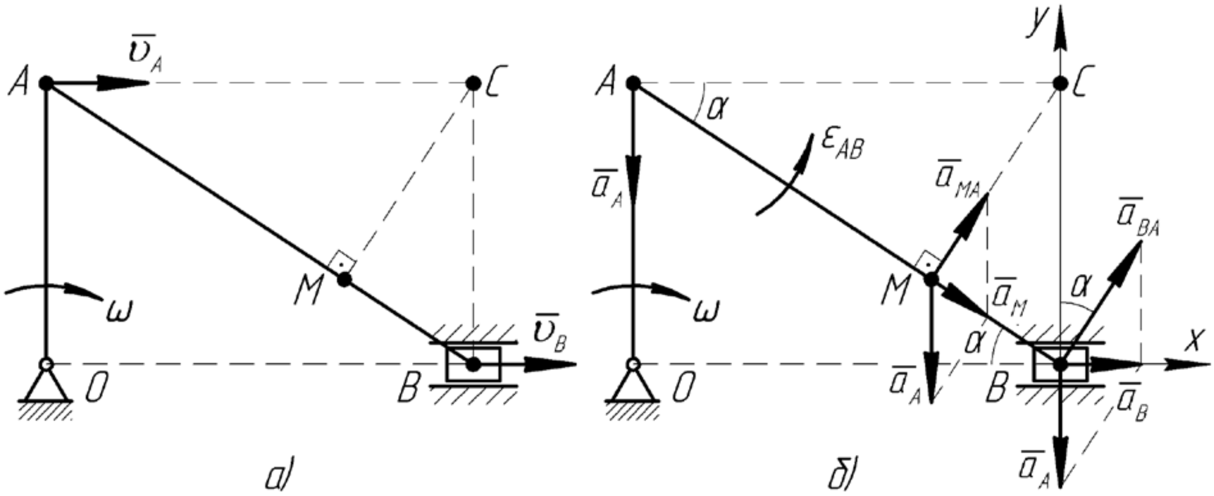

Рис. 3.12

Ползун *B* движется по направляющим, значит, вектор $\overline{\upsilon}_B$ будет направлен горизонтально.

Векторы $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ параллельны и неперпендикулярны прямой *AB*, поэтому МЦС шатуна *AB* находится в бесконечности, а угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = 0$.

Принимаем точку *A* за полюс. Тогда ускорение точки *M*:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}, \tag{3.86}$$

где $\overline{a}_A = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau$ – ускорение полюса *A*;

$\overline{a}_{MA} = \overline{a}_{MA}^{ц} + \overline{a}_{MA}^{вр}$ – ускорение точки *M* вокруг полюса *A*.

Кривошип *OA* вращается с постоянной угловой скоростью *ω*, значит, угловое ускорение кривошипа и касательное ускорение точки *A* равны нулю:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0, \tag{3.87}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0, \tag{3.88}$$

а ускорение точки *A* будет равно:

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 r. \tag{3.89}$$

Вектор $\overline{a}_A$ направлен от точки *A* к точке *O* (рис. 3.12, *б*).

Центростремительное ускорение точки *M* вокруг полюса *A* также равно нулю:

$$a_{MA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AM = 0. \tag{3.90}$$

Ускорение точки *M* вокруг полюса *A* будет равно:

$$a_{MA} = a_{MA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AM, \tag{3.91}$$

Т.к. угловое ускорение ε_{AB} шатуна неизвестно, найдем его, рассмотрев движение ползуна *B*. Ускорение ползуна:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}. \tag{3.92}$$

Ускорение точки *B* вокруг полюса *A* будет равно:

$$a_{BA} = a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_{AB} \cdot l\,. \tag{3.93}$$

Вектор $\overline{a}_{BA}$ направлен перпендикулярно AB, а вектор $\overline{a}_B$ – вдоль направляющих ползуна. Покажем данные векторы на рисунке в соответствии с выбранным направлением. Вектор $\overline{a}_A$ перенесем в точку B, покажем координатные оси и спроецируем на них уравнение (3.92):

- на ось x $\quad a_B = a_{BA} \sin\alpha\,,$ (3.94)

- на ось y $\quad 0 = a_{BA} \cos\alpha - a_A\,,$ (3.95)

где α – угол наклона шатуна AB к OB.

Из последнего уравнения определим ускорение точки B вокруг полюса A:

$$a_{BA} = \frac{a_A}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 r}{\cos\alpha}. \tag{3.96}$$

Т.к. значение a_{BA} положительно, то направление вектора $\overline{a}_{BA}$ на рисунке показано верно. Теперь из уравнения (3.93) найдем угловое ускорение шатуна:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}}{l} = \frac{\omega^2 r}{l\cos\alpha}. \tag{3.97}$$

Направление ε_{AB} определим по направлению вектора $\overline{a}_{BA}$.

Ускорение точки M вокруг точки A получим из уравнения (3.91):

$$a_{MA} = \frac{\omega^2 r}{l\cos\alpha} \cdot AM\,. \tag{3.98}$$

В треугольнике ABC:

$$AM = AC\cos\alpha = AB\cos^2\alpha = l\cos^2\alpha\,. \tag{3.99}$$

Тогда:

$$a_{MA} = \omega^2 r\cos\alpha\,. \tag{3.100}$$

Вектор $\overline{a}_{MA}$ направляем перпендикулярно AM в соответствии с направлением ε_{AB}. Спроецируем уравнение (3.86) на оси:

- на ось x $\quad a_{Mx} = a_{MA} \sin\alpha\,,$ (3.103)

- на ось y $\quad a_{My} = a_{MA} \cos\alpha - a_A\,.$ (3.102)

Подставляя найденные ранее значения, получим проекции ускорения точки M на координатные оси:

$$a_{Mx} = \omega^2 r\cos\alpha\sin\alpha\,, \tag{3.103}$$

$$a_{My} = \omega^2 r\cos^2\alpha - \omega^2 r = \omega^2 r\left(\cos^2\alpha - 1\right) = -\omega^2 r\sin^2\alpha\,. \tag{3.104}$$

Модуль ускорения точки M:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \omega^2 r\sqrt{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \omega^2 r\sin\alpha\,. \tag{3.105}$$

В треугольнике OAB:

$$\sin\alpha = r/l\,. \tag{3.106}$$

Тогда окончательно:

$$a_M = \frac{\omega^2 r^2}{l}. \tag{3.107}$$

Направление вектора $\overline{a}_M$ найдем через направляющие косинусы:

$$\cos\left(\overline{a}_M, x\right) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = \frac{\omega^2 r \cos\alpha \sin\alpha}{\omega^2 r \sin\alpha} = \cos\alpha, \tag{3.108}$$

$$\cos\left(\overline{a}_M, y\right) = \frac{a_{My}}{a_M} = \frac{-\omega^2 r \sin^2\alpha}{\omega^2 r \sin\alpha} = -\sin\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right). \tag{3.109}$$

Т.е. угол между осью *x* и вектором $\overline{a}_M$ будет равен углу *α*, а сам вектор $\overline{a}_M$ будет направлен от точки *M* к точке *A*, как показано на рис. 3.12, *б*.

Задача 3.8. Колесо катится без скольжения по плоскости. Закон движения центра *O* колеса $s = \pi t^2 + 24$ (*s* – в метрах). Определить скорости и ускорения концов M_1, M_2, M_3 и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса в момент времени $t = 1\ с$, если радиус колеса $R = 0{,}5\ м$.

Решение:

1) Скорость точки *O* и угловая скорость колеса составят:

$$\upsilon_O = \dot{s} = 2\pi t, \tag{3.110}$$

$$\omega = \frac{\upsilon_O}{R} = \frac{2\pi t}{0{,}5} = 4\pi t, \tag{3.111}$$

и при $t = 1\ с$: $\upsilon_O = 2\pi\ \ м/с$, $\omega = 4\pi\ \ рад/с$.

МЦС находится в точке M_1 касания колеса с плоскостью, значит, скорость этой точки будет равна нулю ($\upsilon_1 = 0$). Скорости остальных точек будут пропорциональны расстоянию до МЦС:

$$\upsilon_2 = \upsilon_4 = \omega \cdot M_1 M_2 = \omega R\sqrt{2} = 4\pi \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 2{,}8\pi = 8{,}9\ \ м/с, \tag{3.112}$$

$$\upsilon_3 = \omega \cdot M_1 M_3 = \omega \cdot 2R = 4\pi \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 4\pi = 12{,}6\ \ м/с, \tag{3.113}$$

Векторы $\overline{\upsilon}_2$, $\overline{\upsilon}_3$ и $\overline{\upsilon}_4$ будут перпендикулярны отрезкам M_1M_2, M_1M_3 и M_1M_4 соответственно и направлены в сторону вращения колеса (рис. 3.13, *а*).

2) Ускорение точки *O* и угловое ускорение колеса:

$$a_O = \dot{s} = 2\pi\ \ м/с^2, \tag{3.112}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 4\pi\ \ рад/с^2. \tag{3.113}$$

Принимая точку *O* за полюс, найдем ускорения точек по теореме о сложении ускорений:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{a}_{MO}^{вр} + \overline{a}_{MO}^{ц}. \tag{3.114}$$

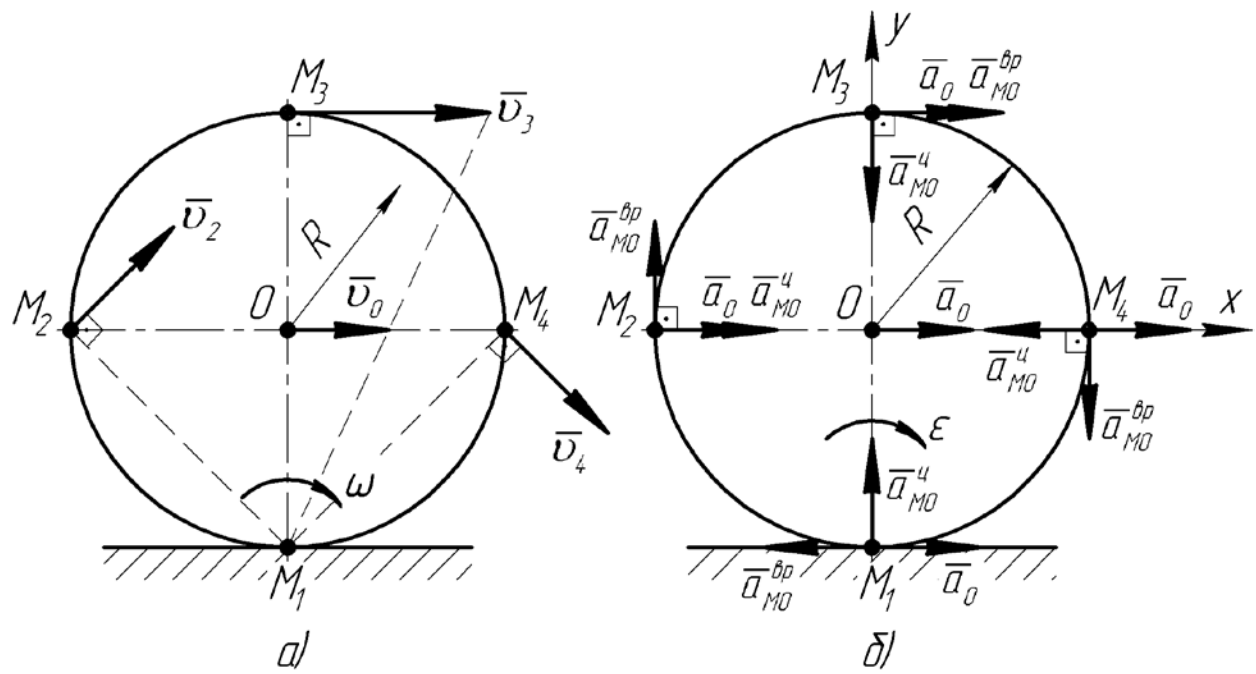

Рис. 3.13

Вращательное и центростремительное ускорения точки M вокруг полюса O:

$$a^{вр}_{MO} = \varepsilon R = 4\pi \cdot 0,5 = 2\pi \ \ м/с^2 , \tag{3.115}$$

$$a^{ц}_{MO} = \omega^2 R = (4\pi)^2 \cdot 0,5 = 8\pi^2 \ \ м/с^2 . \tag{3.116}$$

Вектор $\overline{a}^{вр}_{MO}$ для каждой точки направлен перпендикулярно радиусу в сторону углового ускорения; вектор $\overline{a}^{ц}_{MO}$ направлен к полюсу – к точке O (рис. 3.13, *б*). Выбираем координатные оси, для каждой точки проектируем уравнение (3.114) на эти оси и находим ускорения этих точек.

Для точки M_1:

$$a_{1x} = a_O - a^{вр}_{MO} = 0 , \tag{3.117}$$

$$a_1 = a_{1y} = a^{ц}_{MO} = 8\pi^2 = 78,96 \ \ м/с^2 . \tag{3.118}$$

Для точки M_2:

$$a_{2x} = a_O + a^{ц}_{MO} = 2\pi + 8\pi^2 = 85,24 \ \ м/с^2 , \tag{3.119}$$

$$a_{2y} = a^{вр}_{MO} = 2\pi = 6,28 \ \ м/с^2 , \tag{3.120}$$

$$a_2 = \sqrt{a^2_{2x} + a^2_{2y}} = \sqrt{85,24^2 + 6,28^2} = 85,47 \ \ м/с^2 . \tag{3.121}$$

Для точки M_3:

$$a_{3x} = a_O + a^{вр}_{MO} = 2\pi + 2\pi = 4\pi = 12,57 \ \ м/с^2 , \tag{3.122}$$

$$a_{3y} = a^{ц}_{MO} = 8\pi^2 = 78,96 \ \ м/с^2 , \tag{3.123}$$

$$a_3 = \sqrt{a^2_{3x} + a^2_{3y}} = \sqrt{12,57^2 + 78,96^2} = 79,95 \ \ м/с^2 . \tag{3.124}$$

Для точки M_4:

$$a_{4x} = a_O - a_{MO}^{ц} = 2\pi - 8\pi^2 = -72{,}67 \ м/с^2, \qquad (3.125)$$

$$a_{4y} = a_{MO}^{вр} = 2\pi = 6{,}28 \ м/с^2, \qquad (3.126)$$

$$a_4 = \sqrt{a_{4x}^2 + a_{4y}^2} = \sqrt{(-72{,}67)^2 + 6{,}28^2} = 72{,}94 \ м/с^2. \qquad (3.127)$$

3) Определим ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 с помощью мгновенного центра ускорений. Зная ускорение $\overline{a}_O$ точки *O*, угловую скорость ω и угловое ускорение ε колеса, найдем угол α и расстояние *OQ* от точки *O* до МЦУ – точки *Q*:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \operatorname{arctg}\frac{4\pi}{(4\pi)^2} = \operatorname{arctg}0{,}08 \approx 4{,}5°, \qquad (3.128)$$

$$OQ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(4\pi)^2 + (4\pi)^4}} = \frac{1}{2\sqrt{1+16\pi^2}} = 0{,}04 \ м. \qquad (3.129)$$

От точки *O* под углом α к вектору $\overline{a}_O$ в направлении углового ускорения (т.е. по часовой стрелке) проводим прямую *OE*, на которой откладываем отрезок *OQ* (рис. 3.14, *а*). Точка *Q* и будет мгновенным центром ускорений. Составим пропорцию:

$$\frac{a_O}{OQ} = \frac{a_1}{M_1Q} = \frac{a_2}{M_2Q} = \frac{a_3}{M_3Q} = \frac{a_4}{M_4Q}, \qquad (3.130)$$

где M_1Q, M_2Q, M_3Q и M_4Q – соответственно расстояния от МЦУ до точек M_1, M_2, M_3 и M_4 (рис. 3.14, *б*).

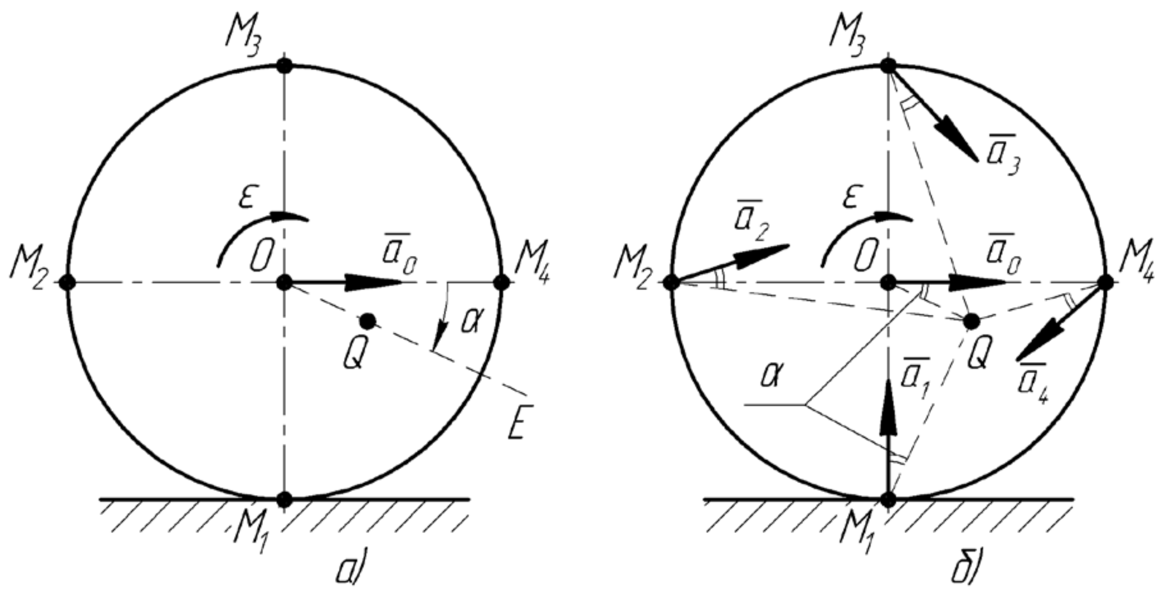

Рис. 3.14

Найдем эти расстояния.

В треугольнике M_1OQ:

$$\angle QOM_1 = 90° - \alpha, \quad \angle OM_1Q = \alpha. \qquad (3.131)$$

Тогда $\angle OQM_1 = 90°$, а искомое расстояние:

$$M_1Q = OM_1 \cos\alpha = R\cos 4,55° = 0,5 \cdot 0,997 = 0,498\ м. \qquad (3.132)$$

Расстояние M_2Q найдем из треугольника M_2OQ по теореме косинусов:

$$M_2Q = \sqrt{\left(M_2O\right)^2 + OQ^2 - 2 \cdot M_2O \cdot OQ \cdot \cos M_2OQ} =$$
$$= \sqrt{0,5^2 + 0,04^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,04 \cdot \cos\left(180° - 4,5°\right)} = 0,54\ м. \qquad (3.133)$$

расстояние M_3Q – из треугольника M_3OQ:

$$M_3Q = \sqrt{\left(M_3O\right)^2 + OQ^2 - 2 \cdot M_3O \cdot OQ \cdot \cos M_3OQ} =$$
$$= \sqrt{0,5^2 + 0,04^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,04 \cdot \cos\left(90° + 4,5°\right)} = 0,505\ м. \qquad (3.134)$$

а расстояние M_4Q – из треугольника M_4OQ:

$$M_4Q = \sqrt{\left(M_4O\right)^2 + OQ^2 - 2 \cdot M_4O \cdot OQ \cdot \cos M_4OQ} =$$
$$= \sqrt{0,5^2 + 0,04^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,04 \cdot \cos 4,5°} = 0,46\ м. \qquad (3.135)$$

Теперь из пропорции (3.130) находим ускорения соответствующих точек:

$$a_1 = a_O \cdot \frac{M_1Q}{OQ} = 2\pi \cdot \frac{0,498}{0,04} = 78,22\ м/c^2, \qquad (3.136)$$

$$a_2 = a_O \cdot \frac{M_2Q}{OQ} = 2\pi \cdot \frac{0,54}{0,04} = 84,82\ м/c^2, \qquad (3.137)$$

$$a_3 = a_O \cdot \frac{M_3Q}{OQ} = 2\pi \cdot \frac{0,505}{0,04} = 79,33\ м/c^2, \qquad (3.138)$$

$$a_4 = a_O \cdot \frac{M_4Q}{OQ} = 2\pi \cdot \frac{0,46}{0,04} = 72,26\ м/c^2. \qquad (3.139)$$

Как видим, данные результаты отличаются от ранее полученных на величину погрешности расчета.

Задача 3.9. Кривошип *OA* планетарно-кулисного механизма, вращаясь вокруг оси *O* с постоянной угловой скоростью ω_0, приводит в движение сателлит *D*, связанный шарнирно со стержнем *BF* (рис. 3.15). Стержень *BF* в своем движении все время проходит через неподвижную точку *C*. Определить скорости точек *B*, *C*, *F* и ускорение точки *F* при заданном положении механизма, если радиус неподвижной шестерни равен *2r*, подвижной – *r*; $AB = r\sqrt{3}$, $BC = 3r$, $CF = r$.

Решение:

Скорость точки *A* кривошипа:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = 3\omega_0 r. \qquad (3.140)$$

Вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно *OA* в сторону вращения (рис. 3.16).

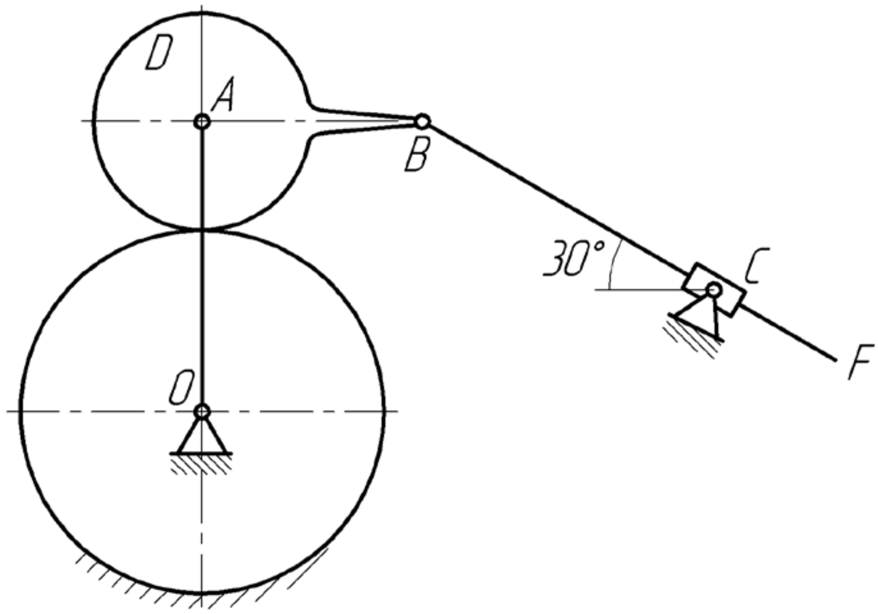

Рис. 3.15

МЦС сателлита D находится в точке P касания с неподвижным колесом. Угловая скорость сателлита D:

$$\omega_D = \frac{\upsilon_A}{AP} = 3\omega_0 . \tag{3.141}$$

Скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega_D \cdot BP . \tag{3.142}$$

В треугольнике ABP:

$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = 2r . \tag{3.143}$$

Тогда

$$\upsilon_B = 3\omega_0 \cdot 2r = 6\omega_0 r . \tag{3.144}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_B$ будет направлен перпендикулярно BP в сторону вращения сателлита D.

Вектор скорости точки стержня BF, совпадающей с качающейся втулкой C, направлен вдоль стержня. Тогда МЦС стержня BF будет находиться в точке P_1 – на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек B и C к векторам $\bar{\upsilon}_B$ и $\bar{\upsilon}_C$ соответственно. Вектор $\bar{\upsilon}_F$ скорости точки F будет направлен перпендикулярно FP_1 в сторону вращения стержня BF (рис. 3.16).

Запишем пропорцию:

$$\frac{\upsilon_B}{BP_1} = \frac{\upsilon_C}{CP_1} = \frac{\upsilon_F}{FP_1} . \tag{3.145}$$

В треугольнике ABP катет AP вдвое меньше гипотенузы BP, значит, $\angle ABP = 30°$. Тогда в треугольнике BP_1C:

$$\angle CBP_1 = 60° , \tag{3.146}$$

$$CP_1 = BC \operatorname{tg} 60° = 3\sqrt{3}r , \tag{3.147}$$

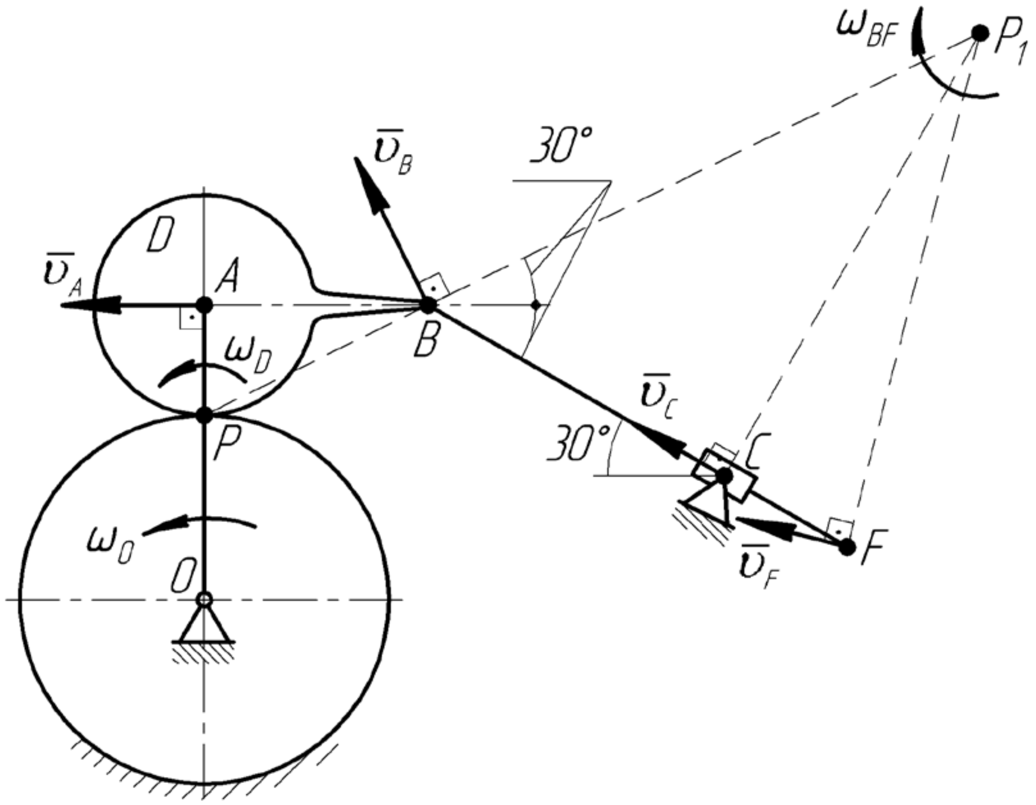

Рис. 3.16

$$\frac{CP_1}{BP_1} = \cos 30°, \tag{3.148}$$

а в треугольнике FP_1C:

$$FP_1 = \sqrt{(CP_1)^2 + CF^2} = 2\sqrt{7}r. \tag{3.149}$$

Из уравнения (3.145) находим скорости точек C и F:

$$\upsilon_C = \upsilon_B \cdot \frac{CP_1}{BP_1} = 6\omega_0 r \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}\omega_0 r, \tag{3.150}$$

$$\upsilon_F = \upsilon_C \cdot \frac{FP_1}{CP_1} = 3\sqrt{3}\omega_0 r \cdot \frac{2\sqrt{7}r}{3\sqrt{3}r} = 2\sqrt{7}\omega_0 r. \tag{3.151}$$

Угловая скорость стержня BF:

$$\omega_{BF} = \frac{\upsilon_C}{CP_1} = \frac{3\sqrt{3}\omega_0 r}{3\sqrt{3}r} = \omega_0. \tag{3.152}$$

Чтобы найти ускорение точки F, последовательно найдем ускорения всех точек механизма.

Ускорение точки A кривошипа:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau. \tag{3.153}$$

Т.к. кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0, значит, угловое ускорение кривошипа и касательное ускорение точки A равны нулю:

$$\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = 0, \tag{3.154}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 0, \tag{3.155}$$

а ускорение точки A будет равно:

$$a_A = a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 3\omega_0^2 r. \tag{3.156}$$

Вектор $\overline{a}_A$ направлен от точки A к точке O (рис. 3.17, *а*).

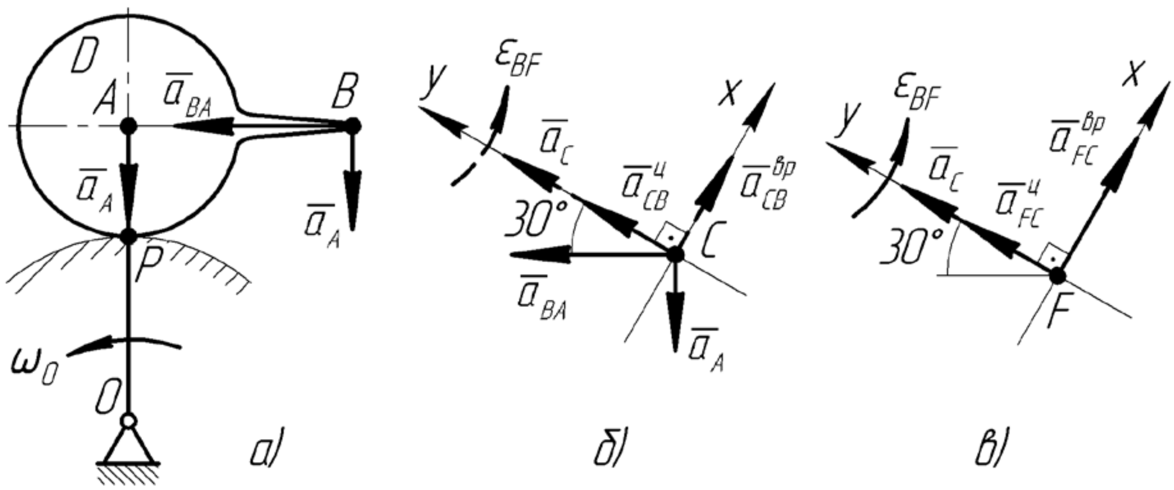

Рис. 3.17

Принимаем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \tag{3.157}$$

где $\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}$ – ускорение точки B вокруг полюса A.

Т.к. a_A^τ, то угловое ускорение сателлита D и вращательное ускорение точки B вокруг полюса A также будут равны нулю:

$$\varepsilon_D = \frac{a_A^\tau}{AP} = 0, \tag{3.158}$$

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_D \cdot AB = 0. \tag{3.159}$$

Тогда ускорение точки B вокруг полюса A:

$$a_{BA} = a_{BA}^{ц} = \omega_D^2 \cdot AB = \left(3\omega_0\right)^2 \cdot r\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\omega_0^2 r. \tag{3.160}$$

Вектор $\overline{a}_{BA}$ направлен от точки B к точке A (рис. 3.17, *а*).

Примем точку B за полюс, тогда ускорение точки C:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^{ц} + \overline{a}_{CB}^{вр}, \tag{3.161}$$

или с учетом уравнения (3.157):

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} + \overline{a}_{CB}^{ц} + \overline{a}_{CB}^{вр}. \tag{3.162}$$

Центростремительное ускорение точки C вокруг полюса B:

$$a_{CB}^{ц} = \omega_{BF}^2 \cdot BC = 3\omega_0^2 r. \tag{3.163}$$

Вектор $\overline{a}_{CB}^{ц}$ направлен от точки C к полюсу B (рис. 3.17, *б*).

Вращательное ускорение точки C вокруг полюса B:

$$a_{CB}^{вр} = \varepsilon_{BF} \cdot BC\,. \qquad (3.164)$$

Чтобы найти угловое ускорение ε_{BF} стержня *BF*, покажем на рисунке векторы $\overline{a}_{CB}^{вр}$ и $\overline{a}_C$: $\overline{a}_{CB}^{вр} \perp BF$, $\overline{a}_C$ – вдоль стержня *BF*. Также перенесем в точку *B* векторы $\overline{a}_A$ и $\overline{a}_{BA}$. Выберем координатные оси и спроектируем на них уравнение (3.162):

- на ось *x* $\quad 0 = -a_A \sin 60° - a_{BA} \sin 30° + a_{CB}^{вр}$, (3.165)

- на ось *y* $\quad a_C = -a_A \cos 60° + a_{BA} \cos 30° + a_{CB}^{ц}$. (3.166)

Отсюда вращательное ускорение точки *C* вокруг полюса *B*:

$$a_{CB}^{вр} = a_A \sin 60° + a_{BA} \sin 30° = 3\omega_0^2 r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 9\sqrt{3}\omega_0^2 r \cdot \frac{1}{2} = 6\sqrt{3}\omega_0^2 r\,, \qquad (3.167)$$

а ускорение точки *C*:

$$a_C = -3\omega_0^2 r \cdot \frac{1}{2} + 9\sqrt{3}\omega_0^2 r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\omega_0^2 r = 15\omega_0^2 r\,. \qquad (3.168)$$

Значения найденных ускорений положительны, значит, их направления выбраны верно.

Из уравнения (3.164) найдем угловое ускорение стержня *BF*:

$$\varepsilon_{BF} = \frac{a_{CB}^{вр}}{BC} = \frac{6\sqrt{3}\omega_0^2 r}{3r} = 2\sqrt{3}\omega_0^2 r\,. \qquad (3.169)$$

Примем точку *C* за полюс, тогда ускорение точки *F*:

$$\overline{a}_F = \overline{a}_C + \overline{a}_{FC}^{ц} + \overline{a}_{FC}^{вр}\,. \qquad (3.170)$$

Центростремительное ускорение точки *F* вокруг полюса *C*:

$$a_{FC}^{ц} = \omega_{BF}^2 \cdot CF = \omega_0^2 r\,. \qquad (3.171)$$

Вращательное ускорение точки *F* вокруг полюса *C*:

$$a_{FC}^{вр} = \varepsilon_{BF} \cdot CF = 2\sqrt{3}\omega_0^2 r\,. \qquad (3.172)$$

Вектор $\overline{a}_{FC}^{ц}$ направлен от точки *F* к полюсу *C*, а вектор $\overline{a}_{FC}^{вр}$ – перпендикулярно *CF* в сторону углового ускорения (рис. 3.17, *в*).

Выберем координатные оси и спроектируем на них уравнение (3.170):

- на ось *x* $\quad a_{Fx} = a_{FC}^{вр}$, (3.173)

- на ось *y* $\quad a_{Fy} = a_C + a_{FC}^{ц}$. (3.174)

Найдем проекции ускорения точки *F*:

$$a_{Fx} = 2\sqrt{3}\omega_0^2 r\,, \qquad (3.175)$$

$$a_{Fy} = 15\omega_0^2 r + \omega_0^2 r = 16\omega_0^2 r\,, \qquad (3.176)$$

а модуль ускорения:

$$a_F = \sqrt{a_{Fx}^2 + a_{Fy}^2} = \omega_0^2 r \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 16^2} = \sqrt{268}\omega_0^2 r = 16{,}37\omega_0^2 r\,. \qquad (3.177)$$

Задача 3.10. Эпициклический механизм состоит из двух одинаковых зубчатых колес *2* и *3* радиуса r и колеса *1*, у которого ось вращения проходит через центр неподвижного колеса *3* (рис. 3.18, *а*). Колесо *1* вращается с угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1. Определить ускорения точек B_2 и P колеса *2*, которые находятся в зацеплении с колесами *1* и *3*.

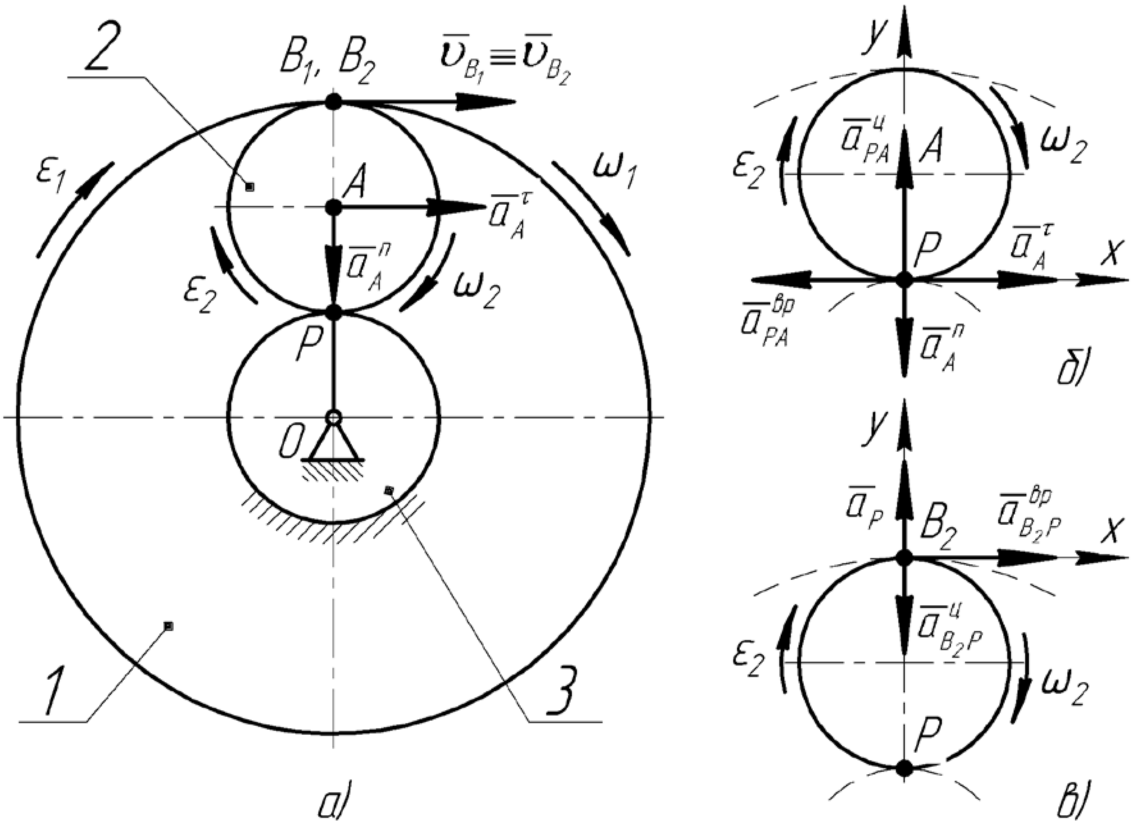

Рис. 3.18

Решение:

Найдем угловую скорость и угловое ускорение колеса *2*. Скорости точек B_1 и B_2 колес *1* и *2*, находящихся в зацеплении (рис. 3.18, *а*), равны:

$$\upsilon_{B_1} = \upsilon_{B_2} = \omega_1 \cdot OB_1 = 3\omega_1 r\,. \qquad (3.178)$$

МЦС колеса *2* находиться в точке P, тогда угловая скорость колеса:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_{B_2}}{B_2P} = \frac{3\omega_1 r}{2r} = \frac{3}{2}\omega_1. \qquad (3.179)$$

Угловое ускорение колеса *2*:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\omega_1\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\varepsilon_1. \qquad (3.180)$$

Примем за полюс центр колеса *2* – точку A. Скорость точки A:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot AP = \frac{3}{2}\omega_1 r\,. \qquad (3.181)$$

Ускорение точки P будет равно:

$$\overline{a}_P = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{PA}^{ц} + \overline{a}_{PA}^{вр}. \tag{3.182}$$

Найдем все необходимые ускорения.

Точка A принадлежит кривошипу OA, вращающемуся вокруг точки O. Тогда нормальное и касательное ускорения точки A:

$$a_A^n = \frac{\upsilon_A^2}{OA} = \frac{9\omega_1^2 r^2}{4 \cdot 2r} = \frac{9}{8}\omega_1^2 r, \tag{3.183}$$

$$a_A^\tau = \frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\omega_1 r\right) = \frac{3}{2}\varepsilon_1 r. \tag{3.184}$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ будет направлен от точки A к точке O, а вектор $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно OA в сторону направления ε_2 (рисю 3.18, *а*), т.к. направления угловых ускорений колеса *2* и кривошипа совпадают.

Центростремительное и вращательное ускорения точки P вокруг полюса A:

$$a_{PA}^{ц} = \omega_2^2 \cdot AP = \left(\frac{3}{2}\omega_1\right)^2 \cdot r = \frac{9}{4}\omega_1^2 r, \tag{3.185}$$

$$a_{PA}^{вр} = \varepsilon_2 \cdot AP = \frac{3}{2}\varepsilon_1 r. \tag{3.186}$$

Вектор $\overline{a}_{PA}^{ц}$ направлен от точки P к полюсу A, а вектор $\overline{a}_{PA}^{вр}$ – перпендикулярно AP в сторону направления ε_2 (рис. 3.18, *б*).

Перенесем в точку P векторы $\overline{a}_A^n$ и $\overline{a}_A^\tau$, проведем координатные оси и спроецируем на них уравнение (3.182):

- на ось x $\quad a_{Px} = a_A^\tau - a_{PA}^{вр}, \qquad (3.187)$

- на ось y $\quad a_{Py} = -a_A^n + a_{PA}^{ц}. \qquad (3.188)$

Подставляя значения ускорений, получим:

$$a_{Px} = 0, \tag{3.189}$$

$$a_P = a_{Py} = -\frac{9}{8}\omega_1^2 r + \frac{9}{4}\omega_1^2 r = \frac{9}{4}\omega_1^2 r. \tag{3.190}$$

Т.к. $a_{PA}^{ц} > a_A^n$, вектор $\overline{a}_P$ будет направлен туда же куда и вектор $\overline{a}_{PA}^{ц}$ – от точки P к полюсу A.

Теперь примем за полюс точку P и найдем ускорение точки B_2:

$$\overline{a}_{B_2} = \overline{a}_P + \overline{a}_{B_2P}^{ц} + \overline{a}_{B_2P}^{вр}. \tag{3.191}$$

Центростремительное и вращательное ускорения точки B_2 вокруг полюса P:

$$a_{B_2P}^{ц} = \omega_2^2 \cdot B_2P = \left(\frac{3}{2}\omega_1\right)^2 \cdot 2r = \frac{9}{2}\omega_1^2 r, \tag{3.192}$$

$$a_{B_2P}^{вр} = \varepsilon_2 \cdot B_2P = 3\varepsilon_1 r. \qquad (3.193)$$

Вектор $\overline{a}_{B_2P}^{ц}$ направлен от точки B_2 к полюсу P, а вектор $\overline{a}_{B_2P}^{вр}$ – перпендикулярно B_2P в сторону направления ε_2 (рис. 3.18, *в*). Также приложим к точке P вектор $\overline{a}_P$. Проведем координатные оси и спроецируем на них уравнение (3.191):

- на ось x $\quad a_{B_2x} = a_{B_2P}^{вр}, \qquad (3.194)$

- на ось y $\quad a_{B_2y} = a_P - a_{B_2P}^{ц}. \qquad (3.195)$

С учетом полученных значений:

$$a_{B_2x} = 3\varepsilon_1 r, \qquad (3.196)$$

$$a_{B_2y} = \frac{9}{8}\omega_1^2 r - \frac{9}{2}\omega_1^2 r = -\frac{27}{8}\omega_1^2 r, \qquad (3.197)$$

а ускорение точки B_2:

$$a_{B_2} = \sqrt{a_{B_2x}^2 + a_{B_2y}^2} = \sqrt{\left(3\varepsilon_1 r\right)^2 + \left(-\frac{27}{8}\omega_1^2 r\right)^2} = 3r\sqrt{\frac{81}{64}\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}. \qquad (3.198)$$

Отметим, что ускорение точки B_1 колеса *1*, совпадающей в данный момент времени с точкой B_2 колеса *2*, будет равно:

$$a_{B_1} = \sqrt{\left(a_{B_1}^n\right)^2 + \left(a_{B_1}^\tau\right)^2} = \sqrt{\left(\omega_1^2 \cdot 3r\right)^2 + \left(\varepsilon_1 \cdot 3r\right)^2} = 3r\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}. \qquad (3.199)$$

Таким образом, ускорения точек B_1 и B_2 не равны.

Задача 3.11. Суммирующий механизм состоит из зубчатого колеса радиусом r и двух параллельных зубчатых реек, движущихся в одном направлении с постоянными скоростями υ_A и υ_B (рис. 3.19, *а*). Определить скорость центра O зубчатого колеса и ускорения точек A и B колеса, находящихся в зацеплении с рейками.

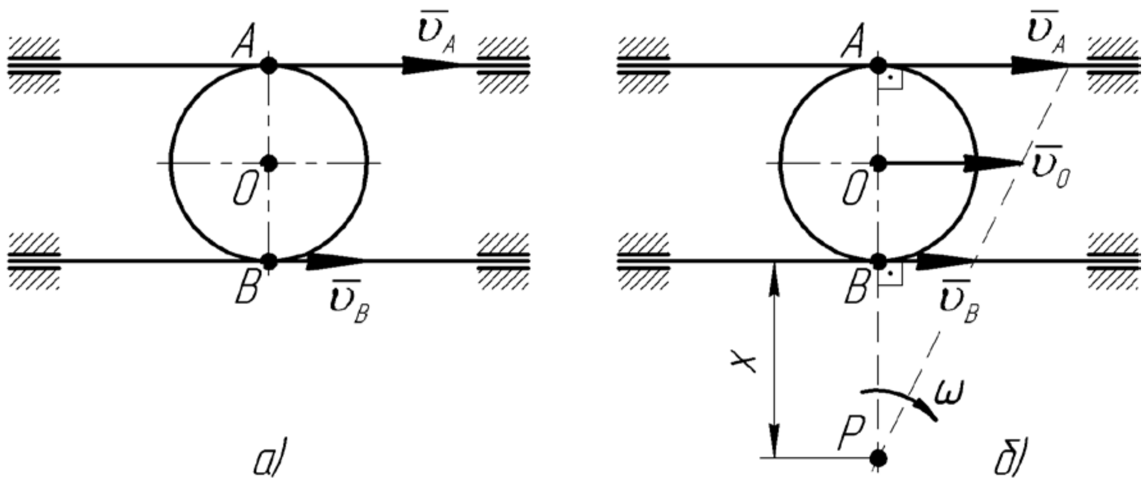

Рис. 3.19

Решение:

Примем за полюс точку O, тогда ускорение точки A:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_O + \overline{a}_{AO}^{ц} + \overline{a}_{AO}^{вр}. \qquad (3.200)$$

Найдем каждое из составляющих ускорений.

Векторы $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ параллельны и перпендикулярны AB, а МЦС колеса находится в точке P (рис. 3.19, *б*). Запишем пропорцию:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}. \qquad (3.201)$$

Обозначим $BP = x$, тогда:

$$\frac{\upsilon_A}{x+2r} = \frac{\upsilon_B}{x}, \qquad (3.202)$$

откуда:

$$x = \frac{2\upsilon_B r}{\upsilon_A - \upsilon_B}. \qquad (3.203)$$

Угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_B}{x} = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2r}, \qquad (3.204)$$

а скорость точки O:

$$\upsilon_O = \omega \cdot PO = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2r} \cdot (x + r) = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2r} \cdot \left(\frac{2\upsilon_B r}{\upsilon_A - \upsilon_B} + r \right) = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{2}. \qquad (3.205)$$

Следовательно, точка O также движется с постоянной скоростью, а ее ускорение a_O равно нулю.

Центростремительное ускорение точки A вокруг полюса O:

$$a_{AO}^{ц} = \omega^2 \cdot AO = \left(\frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2r} \right)^2 \cdot r = \frac{(\upsilon_A - \upsilon_B)^2}{4r}. \qquad (3.206)$$

Т.к. линейное ускорение точки A, принадлежащей рейке, равно нулю, то $a_{AO}^{вр} = 0$.

Тогда из уравнения (3.200):

$$a_A = a_{AO}^{ц} = \frac{(\upsilon_A - \upsilon_B)^2}{4r}. \qquad (3.207)$$

Вектор $\overline{a}_A$ будет направлен, как и $\overline{a}_{AO}^{ц}$, от точки A к полюсу O.

Рассуждая аналогичным образом, найдем, что $a_B = a_A$.

Задача 3.12. Ползун B движется равномерно в прямолинейных горизонтальных направляющих со скоростью $\overline{\upsilon}$ и приводит в движение стержень AC и кривошип OA (рис. 3.20, *а*). Определить ускорение точек A и C в тот момент, когда точка B находится на одной вертикали с неподвижной точкой O, а $\angle OAC = 90°$. Длина кривошипа $OA = R$, расстояние от шарнира O до направляющей ползуна равно h, $BC = a$.

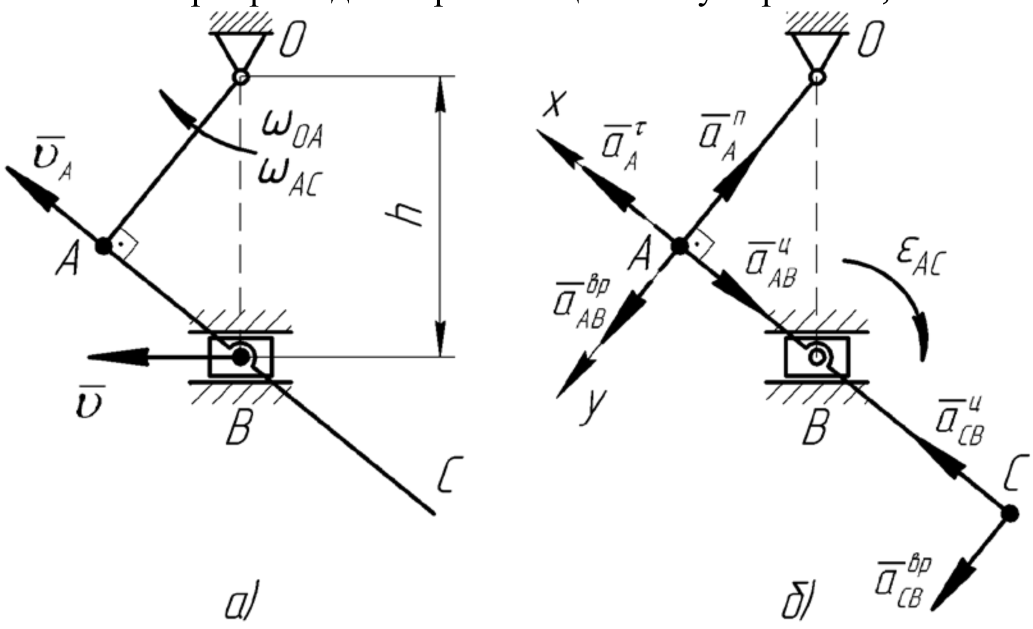

Рис. 3.20

Решение:

Найдем угловые скорости звеньев механизма. Т.к. кривошип OA совершает вращательное движение, то вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно OA.

МЦС стержня AC будет находиться на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и B к векторам $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}$, т.е. в точке O (рис. 3.20, *а*). Угловая скорость стержня AC:

$$\omega_{AC} = \frac{\upsilon}{OB} = \frac{\upsilon}{h}. \tag{3.208}$$

Скорость точки A:

$$\upsilon_A = \omega_{AC} \cdot OA = \frac{\upsilon R}{h}. \tag{3.209}$$

Угловая скорость кривошипа OA:

$$\omega_{OA} = \frac{\upsilon_A}{OA} = \omega_{AC} = \frac{\upsilon}{h}. \tag{3.210}$$

Точка B стержня движется с постоянной скоростью, значит, ее ускорение будет равно нулю ($\overline{a}_B = 0$). Тогда для определения ускорения точки A, примем за полюс точку B:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{a}_{AB}^{ц} + \overline{a}_{AB}^{вр} = \overline{a}_{AB}^{ц} + \overline{a}_{AB}^{вр}. \tag{3.211}$$

Одновременно точка A принадлежит кривошипу OA, значит, ее ускорение можно найти по формуле:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau. \tag{3.212}$$

Приравнивая уравнения (3.211) и (3.212), получим:

$$\overline{a}_{AB}^{ц} + \overline{a}_{AB}^{вр} = \overline{a}_{A}^{n} + \overline{a}_{A}^{\tau}. \qquad (3.213)$$

Центростремительное ускорение точки A вокруг полюса B:

$$a_{AB}^{ц} = \omega_{AC}^{2} \cdot AB, \qquad (3.214)$$

где $AB = \sqrt{h^2 - R^2}$. Тогда

$$a_{AB}^{ц} = \frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot \sqrt{h^2 - R^2}. \qquad (3.215)$$

Нормальное ускорение точки A:

$$a_{A}^{n} = \omega_{OA}^{2} \cdot OA = \frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot R. \qquad (3.216)$$

Вектор $\overline{a}_{AB}^{ц}$ направлен от точки A к полюсу B, а вектор $\overline{a}_{A}^{n}$ – от точки A к точке O (рис. 3.20, *б*).

Вектор $\overline{a}_{AB}^{вр}$ должен быть направлен перпендикулярно AB, а вектор $\overline{a}_{A}^{\tau}$ – перпендикулярно OA. Принимаем направления этих векторов, как показано на рис. 3.20, *б*. Выбираем координатные оси и проектируем уравнение (3.213) на эти оси:

$$\text{- на ось } x \quad -a_{AB}^{ц} = a_{A}^{\tau}, \qquad (3.217)$$

$$\text{- на ось } y \quad a_{AB}^{вр} = -a_{A}^{n}. \qquad (3.218)$$

Отсюда касательное ускорение точки A:

$$a_{A}^{\tau} = -a_{AB}^{ц} = -\frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot \sqrt{h^2 - R^2}, \qquad (3.219)$$

а вращательное ускорение точки A вокруг полюса B:

$$a_{AB}^{вр} = -a_{A}^{n} = -\frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot R. \qquad (3.220)$$

Т.к. полученные значения отрицательны, значит, направления векторов $\overline{a}_{A}^{\tau}$ и $\overline{a}_{AB}^{вр}$ противоположны выбранным.

Ускорение точки A найдем по формуле (3.212). Учитывая, что между векторами $\overline{a}_{A}^{n}$ и $\overline{a}_{A}^{\tau}$ прямой угол:

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^{\tau}\right)^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{h^4} \cdot R^2 + \frac{\upsilon^4}{h^4} \cdot \left(h^2 - R^2\right)} = \frac{\upsilon}{h^2}. \qquad (3.221)$$

Угловое ускорение стержня AC:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\left|a_{AB}^{вр}\right|}{AB} = \frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{h^2 - R^2}}. \qquad (3.222)$$

С учетом скорректированного направления вектора $\overline{a}_{AB}^{вр}$ на рис3.20, *б* показываем направление углового ускорения ε_{AC}.

Ускорение точки C найдем, также взяв за полюс точку B:

$$\overline{a}_{C} = \overline{a}_{B} + \overline{a}_{CB}^{ц} + \overline{a}_{CB}^{вр} = \overline{a}_{CB}^{ц} + \overline{a}_{CB}^{вр}. \qquad (3.223)$$

Центростремительное и вращательное ускорения точки C вокруг полюса B:

$$a_{CB}^{ц} = \omega_{AC}^2 \cdot BC = \frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot a, \tag{3.224}$$

$$a_{CB}^{вр} = \varepsilon_{AC} \cdot BC = \frac{\upsilon^2}{h^2} \cdot \frac{Ra}{\sqrt{h^2 - R^2}}. \tag{3.225}$$

Показываем на рис. 3.20, *б* векторы ускорений: $\bar{a}_{CB}^{ц}$ направлен от точки C к полюсу B, а $\bar{a}_{CB}^{вр}$ – перпендикулярно BC в сторону углового ускорения. Т.к. между векторами прямой угол, то ускорение точки C будет равно:

$$a_C = \sqrt{\left(a_{CB}^{ц}\right)^2 + \left(a_{CB}^{вр}\right)^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{h^4} \cdot a^2 + \frac{\upsilon^4}{h^4} \cdot \frac{R^2 a^2}{h^2 - R^2}} = \frac{\upsilon^2 a}{h\sqrt{h^2 - R^2}}. \tag{3.226}$$

Такой же результат можно получить с помощью мгновенного центра ускорений звена AC, которым является точка B ($a_B = 0$). Запишем пропорцию:

$$\frac{a_A}{AB} = \frac{a_C}{CB}, \tag{3.227}$$

откуда

$$a_C = a_A \cdot \frac{CB}{AB} = \frac{\upsilon^2 a}{h\sqrt{h^2 - R^2}}. \tag{3.228}$$

Задача 3.13. В механизме Чебышева шатун ABC изогнут под углом 135° (рис. 3.21, *а*). Определить проекции ускорений точек B и C на оси координат, если кривошип OA длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 и занимает в данный момент крайнее правое положение, образуя с AB угол 45°. Где находится в этом положении мгновенный центр ускорений шатуна, если $AB = O_1B = r\sqrt{2}$, $BC = 2r$?

Решение:

Скорость точки A:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 r. \tag{3.229}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону вращения (рис. 3.21, *б*). Вектор $\bar{\upsilon}_B$ направлен перпендикулярно O_1B, значит, МЦС шатуна ABC находиться в точке O_1 – на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и B к векторам $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ соответственно.

Угловая скорость шатуна ABC:

$$\omega_{ABC} = \frac{\upsilon_A}{O_1A}. \tag{3.330}$$

В треугольнике O_1AB стороны O_1B и AB по условию задачи равны, значит, треугольник O_1AB – равнобедренный:

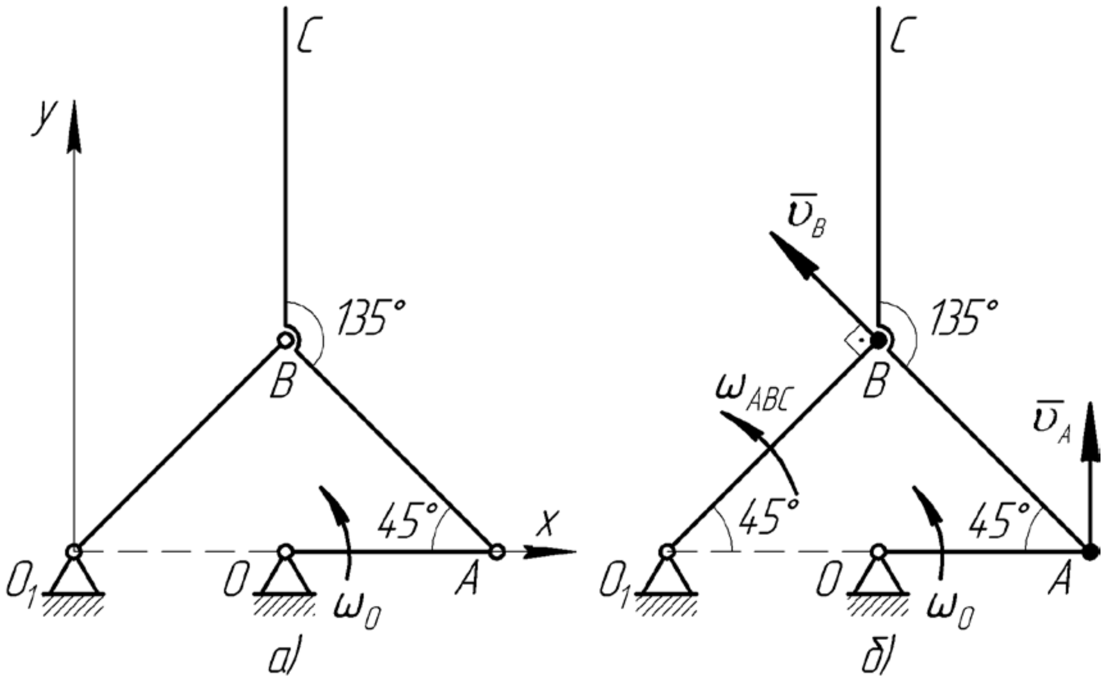

Рис. 3.21

$$\angle O_1AB = \angle AO_1B = 45°, \tag{3.331}$$

$$O_1A = 2AB\cos 45° = 2 \cdot r\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2r. \tag{3.332}$$

Тогда:

$$\omega_{ABC} = \frac{\omega_0 r}{2r} = \frac{\omega_0}{2}. \tag{3.333}$$

Скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega_{ABC} \cdot O_1B. \tag{3.334}$$

Угловая скорость звена O_1B:

$$\omega_{O_1B} = \frac{\upsilon_B}{O_1B} = \omega_{ABC} = \frac{\omega_0}{2}. \tag{3.335}$$

Принимаем точку A за полюс, тогда ускорение точки B по теореме о сложении ускорений:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}. \tag{3.336}$$

В то же время, точка B принадлежит вращающемуся звену O_1B и ее ускорение можно найти из уравнения:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau. \tag{3.337}$$

Приравнивая уравнения (3.336) и (3.337), получим:

$$\overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр} = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau. \tag{3.338}$$

Найдем все составляющие этого уравнения.

Т.к. кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью:

$$a_A = a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2 r\,. \tag{3.339}$$

$$a_A = a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2 r\,. \tag{3.340}$$

Вектор $\overline{a}_A$ направлен так же, как и вектор $\overline{a}_A^n$, – от точки *A* к точке *O* (рис. 3.22, *а*). Переносим вектор $\overline{a}_A$ в точку *B*.

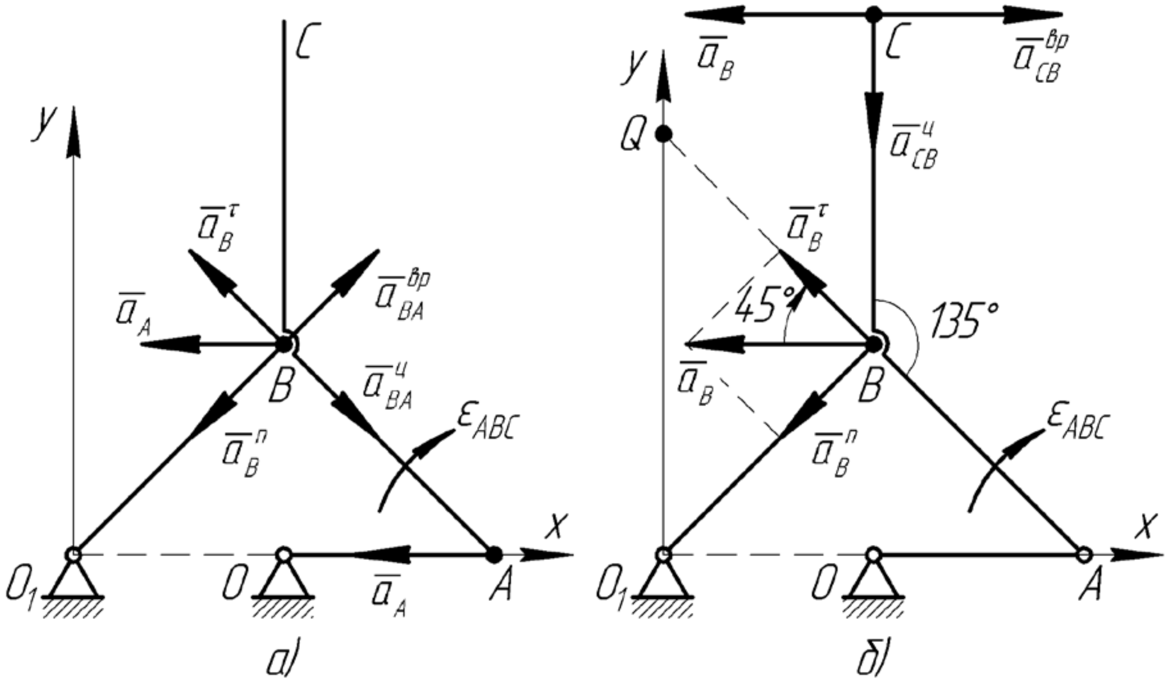

Рис. 3.22

Центростремительное ускорение точки *B* вокруг полюса *A*:

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{ABC}^2 \cdot AB = \frac{\omega_0^2}{4} \cdot r\sqrt{2} = \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}. \tag{3.341}$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^{ц}$ направлен от точки *B* к точке *A*.

Нормальное ускорение точки *B*:

$$a_B^n = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B = \frac{\omega_0^2}{4} \cdot r\sqrt{2} = \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}. \tag{3.342}$$

Вектор $\overline{a}_B^n$ направлен от точки *B* к точке O_1.

Вектор $\overline{a}_{BA}^{вр}$ направлен перпендикулярно *AB*, а вектор $\overline{a}_B^\tau$ – перпендикулярно звену O_1B. Принимаем направления этих векторов, как показано на рис. 3.22, *а* и проектируем уравнение (3.338) на данные координатные оси:

- на ось *x* $\quad -a_A + a_{BA}^{ц}\cos 45° + a_{BA}^{вр}\cos 45° = -a_B^n \cos 45° - a_B^\tau \cos 45°$, (3.343)

- на ось *y* $\quad -a_{BA}^{ц}\cos 45° + a_{BA}^{вр}\cos 45° = -a_B^n \cos 45° + a_B^\tau \cos 45°$. (3.344)

Из второго уравнения получим:

$$a_B^\tau - a_{BA}^{вр} = a_B^n - a_{BA}^{ц} = 0\,, \tag{3.345}$$

или

$$a_B^\tau = a_{BA}^{вр}. \tag{3.346}$$

Тогда из первого уравнения:

$$a_{BA}^{вр}\cos 45° + a_B^\tau \cos 45° = a_A - a_B^n \cos 45° - a_{BA}^{ц}\cos 45°, \tag{3.347}$$

$$2a_{BA}^{вр} = \frac{a_A}{\cos 45°} - a_B^n - a_{BA}^{ц}, \tag{3.348}$$

$$a_{BA}^{вр} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_A}{\cos 45°} - a_B^n - a_{BA}^{ц}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\omega_0^2 r}{\sqrt{2}/2} - \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}} - \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}} = a_B^\tau. \tag{3.349}$$

Т.к. полученные значения положительны, то направления векторов были выбраны верно.

Ускорение точки B:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\omega_0^2 r}{2}. \tag{3.350}$$

Чтобы найти направление вектора $\overline{a}_B$, спроектируем на координатные оси уравнение (3.337):

- на ось x $\quad a_{Bx} = -a_B^n \cos 45° - a_B^\tau \cos 45°$, (3.351)

- на ось y $\quad a_{By} = -a_B^n \cos 45° + a_B^\tau \cos 45°$. (3.352)

Учитывая, что значения a_B^n и a_B^τ равны, то проекции ускорения точки B составят:

$$a_{By} = 0, \tag{3.353}$$

$$a_{Bx} = -2a_B^n \cos 45° = -2\cdot\frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\omega_0^2 r}{2}. \tag{3.354}$$

Таким образом, вектор $\overline{a}_B$ будет направлен горизонтально в сторону, противоположную положительному направлению оси x (рис. 3.22, *б*).

Найдем угловое ускорение шатуна ABC:

$$\varepsilon_{ABC} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{\omega_0^2}{4}. \tag{3.355}$$

Направление углового ускорения определяем по направлению вектора $\overline{a}_{BA}^{вр}$, т.е. угловое ускорение шатуна ABC будет направлено по часовой стрелке (рис. 3.22, *а*).

Чтобы найти положение МЦУ, вычислим угол α и расстояние BQ от точки B до МЦУ:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\left|\varepsilon_{ABC}\right|}{\omega_{ABC}^2} = \mathrm{arctg}1 = 45°, \tag{3.356}$$

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon_{ABC}^2 + \omega_{ABC}^4}} = \frac{\omega_0^2 r}{2\sqrt{\frac{\omega_0^4}{16} + \frac{\omega_0^4}{16}}} = r\sqrt{2}. \qquad (3.357)$$

Под углом 45° к вектору $\overline{a}_B$ по часовой стрелке откладываем отрезок *BQ* (рис. 3.22, *б*). Таким образом, МЦУ точка *Q* – будет находиться на продолжении прямой *AB* и на одной вертикали с точкой O_1.

Найдем ускорение точки *C*, для этого примем за полюс точку *B*. Тогда по теореме о сложении ускорений:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^{ц} + \overline{a}_{CB}^{вр}. \qquad (3.358)$$

Центростремительное и вращательное ускорения точки *C* вокруг полюса *B*:

$$a_{CB}^{ц} = \omega_{ABC}^2 \cdot BC = \frac{\omega_0^2}{4} \cdot 2r = \frac{\omega_0^2 r}{2}, \qquad (3.359)$$

$$a_{CB}^{вр} = \varepsilon_{ABC} \cdot BC = \frac{\omega_0^2}{4} \cdot 2r = \frac{\omega_0^2 r}{2}. \qquad (3.360)$$

Вектор $\overline{a}_{CB}^{ц}$ направлен от точки *C* к точке *B*, а вектор $\overline{a}_{CB}^{вр}$ – перпендикулярно *CB* в сторону углового ускорения. Также перенесем в точку *C* вектор $\overline{a}_B$. Спроектируем уравнение (3.358) на оси:

- на ось *x* $a_{Cx} = -a_B + a_{CB}^{вр}$, (3.361)

- на ось *y* $a_{Cy} = -a_{CB}^{ц}$. (3.362)

Тогда проекции ускорения точки *C*:

$$a_{Cx} = 0, \qquad (3.363)$$

$$a_{Cy} = -\frac{\omega_0^2 r}{2}. \qquad (3.364)$$

Ускорение точки *C* будет равно:

$$a_C = \left|a_{Cy}\right| = \frac{\omega_0^2 r}{2}, \qquad (3.365)$$

а вектор $\overline{a}_C$ будет направлен так же, как и вектор $\overline{a}_{CB}^{ц}$, – от точки *C* к точке *B*.

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Сложным движением называется движение точки, слагающееся из нескольких независимых движений.

Движение точки M относительно подвижной системы отсчета Oxyz называется относительным (рис. 4.1, *а*).

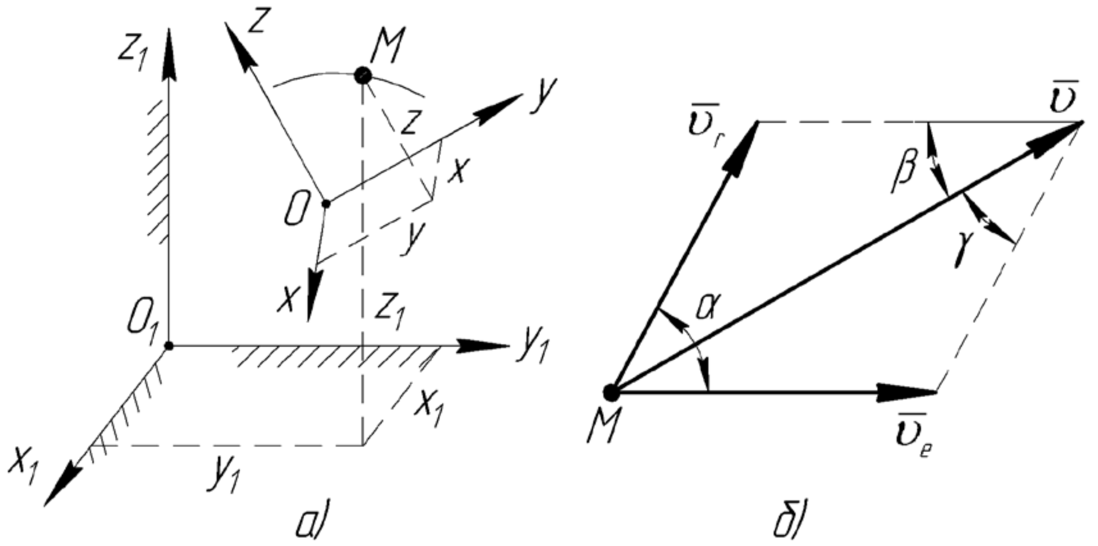

Рис. 4.1

Движение подвижной системы отсчета Oxyz относительно неподвижной $Ox_1y_1z_1$ называется переносным.

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ называется абсолютным.

Чтобы рассмотреть относительное движение точки, нужно мысленно остановить переносное движение (т.е. зафиксировать систему *Oxyz*); чтобы рассмотреть переносное движение точки, нужно мысленно остановить относительное (т.е. рассмотреть точку, как жестко связанную с системой *Oxyz*).

Теорема о сложении скоростей. *При сложном движении точки ее абсолютная скорость равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:*

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e, \qquad (4.1)$$

где $\bar{\upsilon}_r$ – относительная скорость точки, т.е. скорость точки при относительном движении;

$\bar{\upsilon}_e$ – переносная скорость точки (т.е. скорость точки при переносном движении).

Таким образом, вектор $\bar{\upsilon}$ абсолютной скорости точки будет являться диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\upsilon}_r$ и $\bar{\upsilon}_e$ как на сторонах (рис. 4.1, *б*), а модуль абсолютной скорости можем найти из теоремы косинусов:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e\cos\alpha}\,, \tag{4.2}$$

где α – угол между векторами $\overline{\upsilon}_r$ и $\overline{\upsilon}_e$.

Для нахождения зависимости между скоростями также используют теорему синусов:

$$\frac{\upsilon}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon_r}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_e}{\sin\gamma}, \tag{4.3}$$

где β и γ – соответствующие углы (рис. 4.1, *б*).

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). *При сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова:*

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c\,, \tag{4.4}$$

где $\overline{a}_r$ – относительное ускорение точки; если относительная траектория точки является кривой линией, то $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$;

$\overline{a}_e$ – переносное ускорение точки; если переносная траектория точки является кривой линией, то $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$;

$\overline{a}_c$ – кориолисово ускорение точки.

Модуль кориолисова ускорения определяется по формуле:

$$a_c = 2\omega_e\upsilon_r\sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right), \tag{4.5}$$

где ω_e – переносная угловая скорость (т.е. переносное движение – вращательное);

$\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right)$ – угол меду векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$; вектор $\overline{\omega}_e$ направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки, вектор $\overline{\upsilon}_r$ – по касательной к относительной траектории точки в сторону движения.

Правило Жуковского. *Для определения направления вектора* $\overline{a}_c$ *кориолисова ускорения необходимо:*

1) *вектор* $\overline{\upsilon}_r$ *относительной скорости точки спроектировать на плоскость* π_0, *перпендикулярную вектору* $\overline{\omega}_e$ *переносной угловой скорости* (рис. 4.2, *а*);

2) *полученную проекцию* $\overline{\upsilon}_r^0$ *повернуть на* $90°$ *в сторону переносного вращения* (рис. 4.2, *б*).

Кориолисово ускорение равно нулю в случае, если:

1) переносное движение – поступательное ($\omega_e = 0$);

2) относительная скорость точки равна нулю ($\upsilon_r = 0$);

3) векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$ параллельны между собой, т.е. $\sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right) = 0$, а

угол $(\bar{\omega}_e, \bar{\upsilon}_r)$ равен $0°$ или $180°$.

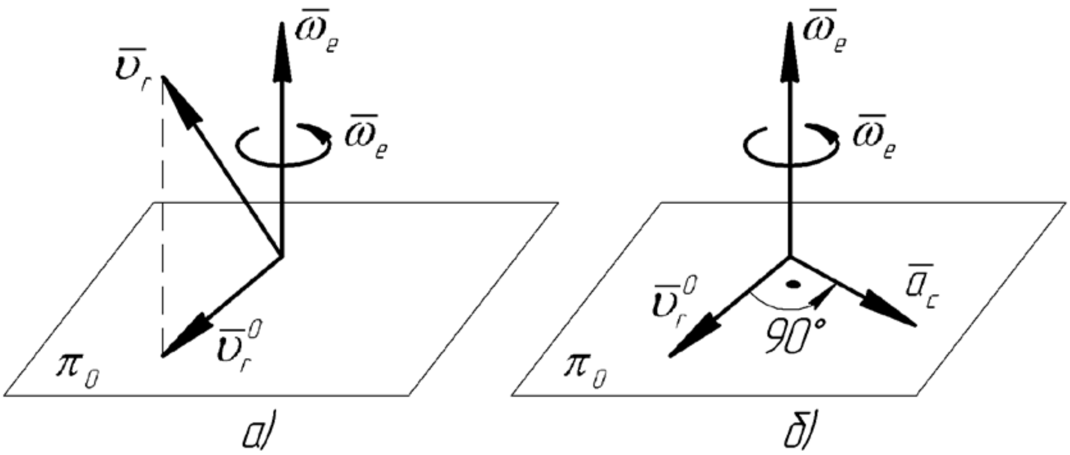

Рис. 4.2

Задача 4.1. Движение точки *M* относительно подвижных осей координат *Oxy* задано уравнениями:

$$x = 4\sin \pi t, \quad y = 1 - \cos \pi t. \tag{4.6}$$

Подвижные оси Ox_1y_1 вращаются в своей плоскости вокруг начала координат – точки *O* – по закону $\varphi = \pi t$. Составить уравнения абсолютного движения точки *M*, т.е. уравнения движения относительно неподвижной системы осей координат.

Решение:

Найдем траекторию относительного движения точки *M*. Для этого выразим из уравнений (4.6):

$$\frac{x}{4} = \sin \pi t, \quad y - 1 = -\cos \pi t, \tag{4.7}$$

возведем в квадрат полученные выражения и сложим их правые и левые части:

$$\frac{x^2}{4^2} + (y-1)^2 = 1. \tag{4.8}$$

Таким образом, траекторией относительного движения точки является эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 1$ и центром эллипса в точке с координатами $(0,1)$.

Изобразим подвижные и неподвижные оси и покажем описываемый точкой *M* эллипс (рис. 4.3).

Тогда уравнения движения точки *M* по отношению к неподвижным осям:

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y_1 = y\cos\varphi + x\sin\varphi. \tag{4.9}$$

Подставляя сюда $\varphi = \pi t$ и уравнения (4.6), получим:

$$x_1 = 4\sin \pi t \cdot \cos \pi t - (1 - \cos \pi t) \cdot \sin \pi t, \tag{4.10}$$

$$y_1 = \left(1 - \cos\pi t\right)\cdot\cos\pi t + 4\sin\pi t\cdot\sin\pi t. \qquad (4.11)$$

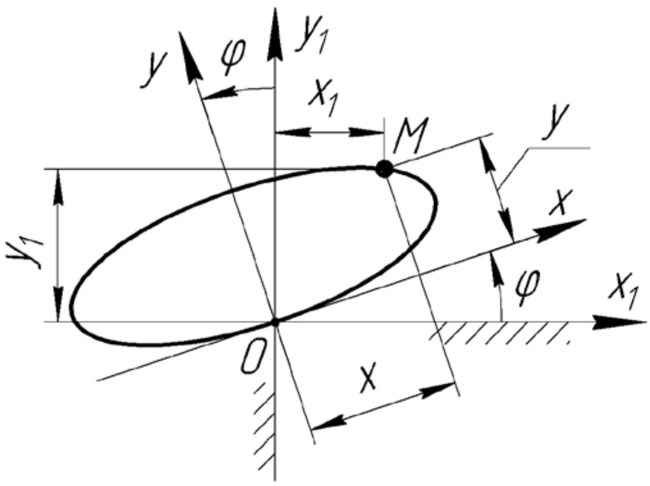

Рис. 4.3

Окончательно уравнения абсолютного движения точки M:

$$x_1 = \sin\pi t\cdot\left(5\cos\pi t - 1\right), \qquad (4.12)$$

$$y_1 = \left(1 - \cos\pi t\right)\cdot\cos\pi t + 4\sin^2\pi t. \qquad (4.13)$$

Задача 4.2. Ползун A перемещается по прямолинейным направляющим при помощи рычага, который вращается вокруг неподвижной оси O (рис. 4.4, *а*). Определить скорость ползуна в зависимости от угла поворота рычага φ, если рычаг имеет в данный момент угловую скорость ω, а расстояние от оси до направляющих равно h.

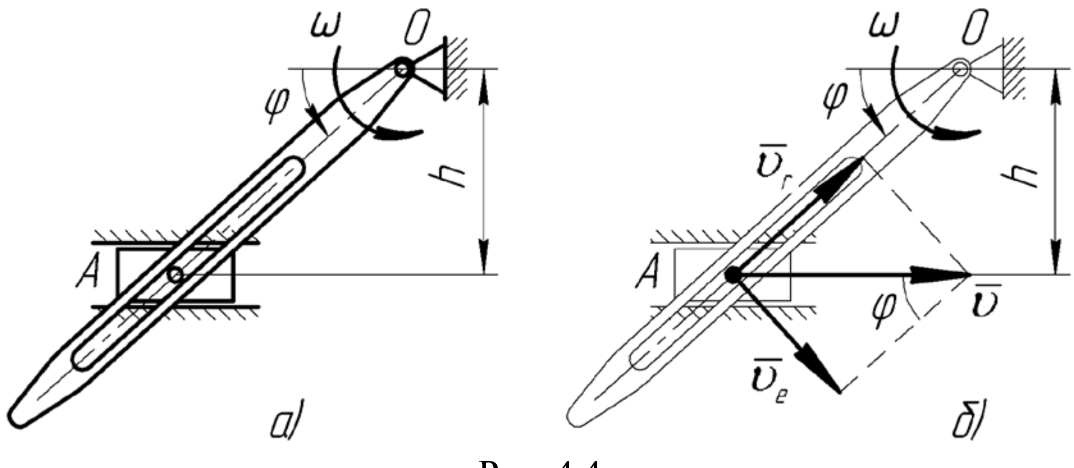

Рис. 4.4

Решение:

В данном механизме подвижная система отсчета – рычаг, а неподвижная система – точка O и направляющие ползуна A. Тогда движение точки A относительно рычага – это относительное движение, вращение рычага – переносное движение, а движение ползуна *A* по направляющим – абсолютное движение.

Скорость ползуна *A* по теореме о сложении скоростей:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e, \tag{4.14}$$

где $\bar{\upsilon}_r$ – относительная скорость точки; направлена вдоль прорези рычага, т.е. к точке *O* (рис. 4.4, *б*);

$\bar{\upsilon}_e$ – переносная скорость точки; т.к. рычаг совершает вращательное движение, то точка *A* при переносном движении будет двигаться по окружности, а вектор $\bar{\upsilon}_e$ будет направлен перпендикулярно *OA*.

Модуль переносной скорости:

$$\upsilon_e = \omega \cdot OA = \omega \cdot \frac{h}{\sin\varphi}. \tag{4.15}$$

Вектор $\bar{\upsilon}$ абсолютной скорости направлен вдоль направляющих и является диагональю прямоугольника, сторонами которого будут векторы $\bar{\upsilon}_r$ и $\bar{\upsilon}_e$ (рис. 4.4, *б*). Здесь по теореме синусов:

$$\frac{\upsilon}{\sin 90^\circ} = \frac{\upsilon_e}{\sin\varphi}, \tag{4.16}$$

откуда найдем скорость точки *A*:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_e}{\sin\varphi} = \frac{\omega h}{\sin^2\varphi}. \tag{4.17}$$

Задача 4.3. Автомобиль движется по горизонтальному шоссе со скоростью $20\ м/с$. Пассажир автомобиля видит через боковое стекло капли дождя наклоненными под углом 40° к вертикали. Определить абсолютную скорость капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

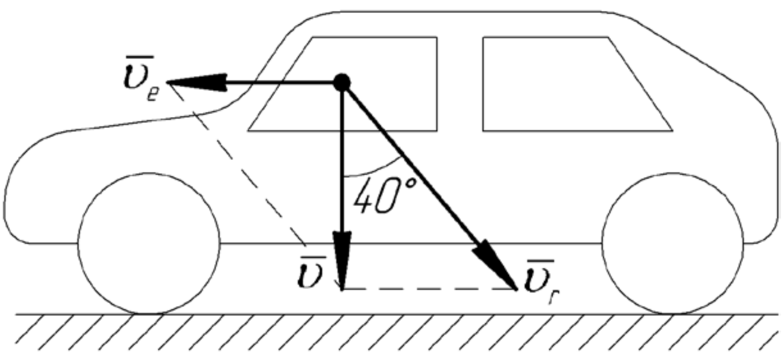

Рис. 4.5

Решение:

Автомобиль будет являться подвижной системой отсчета, дорога – неподвижной. Тогда движение автомобиля будет переносным движением, движение капли относительно автомобиля под углом 40° – относительным, а отвесное падение капли – абсолютным движением.

Соответственно, вектор $\bar{\upsilon}_e$ переносной скорости будет направлен в сторону движения автомобиля, вектор $\bar{\upsilon}_r$ относительной скорости – под углом 40° к вертикали, а вектор $\bar{\upsilon}$ абсолютной скорости – вертикально вниз (рис. 4.5).

Таким образом, решение задачи сводится к определению стороны прямоугольного треугольника:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_e}{\operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{20}{0{,}839} = 23{,}8 \text{ м/с}. \tag{4.18}$$

Задача 4.4. Стержень *AB*, двигающийся вниз в вертикальных направляющих с постоянной скоростью υ, скользит своим концом *B* по стороне *CD* прямоугольного рычага *CDO*, благодаря чему последний поворачивается вокруг неподвижной точки *O*, лежащей на одной прямой со стержнем (рис. 4.6, *а*). Определить угловую скорость рычага, если $OD = a$.

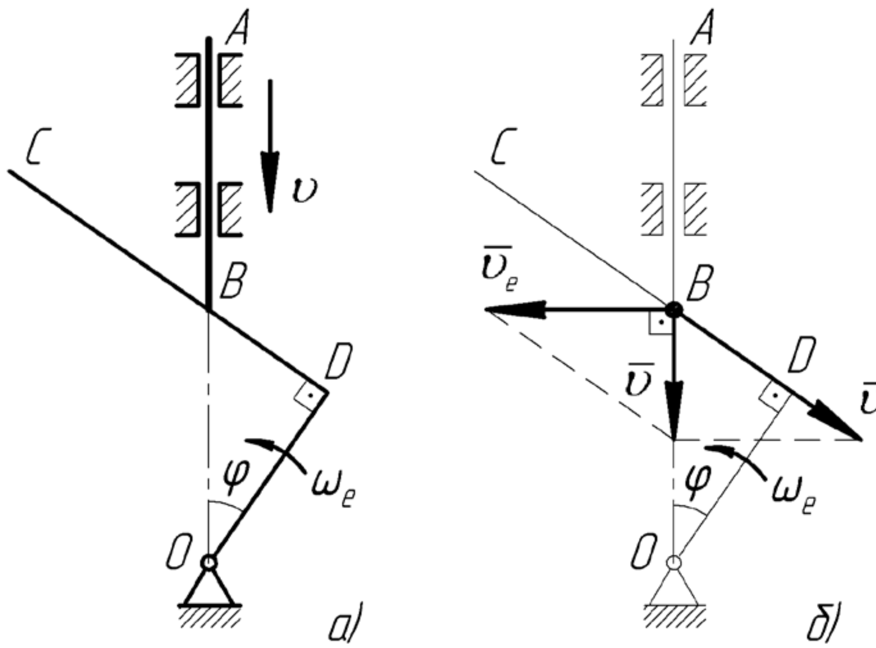

Рис. 4.6

Решение:

В данном механизме вращение рычага *CDO* будет являться переносным движением, движение точки *B* вдоль стороны *CD* рычага *CDO* – относительным движением, а движение точки *B* вместе со стержнем *AB* – абсолютным движением.

Скорость точки *B* по теореме о сложении скоростей:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e, \tag{4.19}$$

где $\overline{\upsilon}_r$ – относительная скорость точки; направлена вдоль стороны *CD* рычага (рис. 4.6, *б*);

$\overline{\upsilon}_e$ – переносная скорость точки; т.к. рычаг совершает вращательное движение, то вектор $\overline{\upsilon}_e$ будет направлен перпендикулярно *OB*.

Вектор $\overline{\upsilon}$ абсолютной скорости точки *B* направлен вертикально вниз.

В треугольнике *OBD* $\angle OBD = 90° - \varphi$. В параллелограмме скоростей:

$$\operatorname{tg}\left(90° - \varphi\right) = \frac{\upsilon_e}{\upsilon}. \tag{4.20}$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\left(90° - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\varphi$, найдем отсюда переносную скорость:

$$\upsilon_e = \upsilon \operatorname{tg}\left(90° - \varphi\right) = \upsilon \operatorname{ctg}\varphi. \tag{4.21}$$

Тогда угловая скорость рычага *CDO*:

$$\omega_e = \frac{\upsilon_e}{OB}. \tag{4.22}$$

В треугольнике *OBD*:

$$OB = \frac{OD}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}, \tag{4.23}$$

тогда окончательно получим:

$$\omega_e = \frac{\upsilon}{a} \operatorname{ctg}\varphi \cos\varphi. \tag{4.24}$$

Задача 4.5. Стержень *OA* длиной *l* приводится во вращательное движение вокруг неподвижной оси *O* кулачком, имеющим форму полуокружности радиусом $r = l/\sqrt{2}$ (рис. 4.7, *а*). Определить угловую скорость стержня в тот момент, когда он составляет угол $\varphi = 30°$ с горизонталью, а кулачок движется поступательно со скоростью *u*.

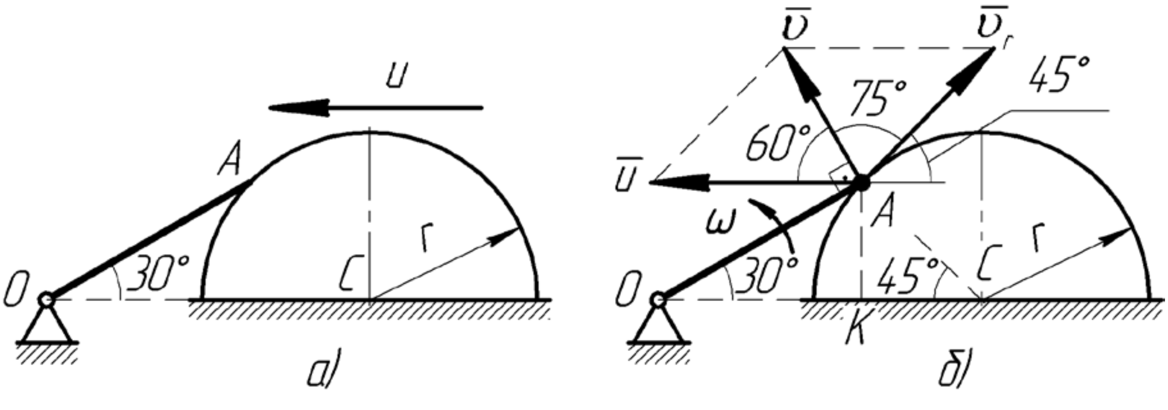

Рис. 4.7

Решение:

Стержень OA будет совершать вращательное движение, а точка A будет двигаться по окружности радиуса OA с центром в точке O. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}$ точки A будет направлена перпендикулярно OA (рис. 4.7, *б*). Кулачок будет являться подвижной системой отсчета. Тогда движение точки A вместе с кулачком будет переносным движением, а движение точки относительно кулачка – относительным. Переносная скорость $\bar{u}$ будет направлена горизонтально в сторону движения кулачка, а относительная $\bar{\upsilon}_r$ – по касательной к полуокружности, т.е. перпендикулярно AC.

По теореме о сложении скоростей:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_r + \bar{u}\,. \tag{4.25}$$

Найдем углы между векторами в параллелограмме скоростей. Для этого из точки A опустим на прямую OC перпендикуляр AK, длина которого:

$$AK = OA\sin 30° = \frac{l}{2}. \tag{4.26}$$

В прямоугольном треугольнике AKC:

$$\sin ACK = \frac{AK}{AC} = \frac{l/2}{r} = \frac{l/2}{l/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{4.27}$$

$$\angle ACK = 45°\,. \tag{4.28}$$

Тогда угол наклона вектора $\bar{\upsilon}_r$ к горизонтали равен 45°, угол наклона вектора $\bar{\upsilon}$ к горизонтали – 60°, а угол между векторами $\bar{\upsilon}$ и $\bar{\upsilon}_r$ – 75° (рис. 4.7, *б*).

По теореме синусов:

$$\frac{u}{\sin 75°} = \frac{\upsilon}{\sin 45°}, \tag{4.29}$$

откуда

$$\upsilon = \frac{u\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{u\sin 45°}{\sin\left(45° + 30°\right)} = \frac{u\sin 45°}{\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°}. \tag{4.30}$$

Учитывая, что $\sin 45° = \cos 45°$, найдем абсолютную скорость точки A:

$$\upsilon = \frac{2u}{\sqrt{3}+1}. \tag{4.31}$$

Угловая скорость стержня OA:

$$\omega = \frac{\upsilon}{OA} = \frac{2u}{l\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}. \tag{4.32}$$

Задача 4.6. Частица M пара попадает на рабочую лопатку колеса осевой рабочей турбины со скоростью υ, равной по величине 1200 *м/с* и образующей с плоскостью *BB*, перпендикулярной оси вала, угол $\alpha = 20°$, а с радиусом ротора – угол 90° (рис. 4.8). Определить величину относительной скорости частицы пара, если эта скорость образует с плоскостью *BB* угол $\beta = 45°$. Какова при этом частота вращения вала, если расстояние от частицы пара до оси вала равно $r = 1,2$ *м*.

Решение:

Абсолютная скорость частицы *M* равна:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e, \tag{4.33}$$

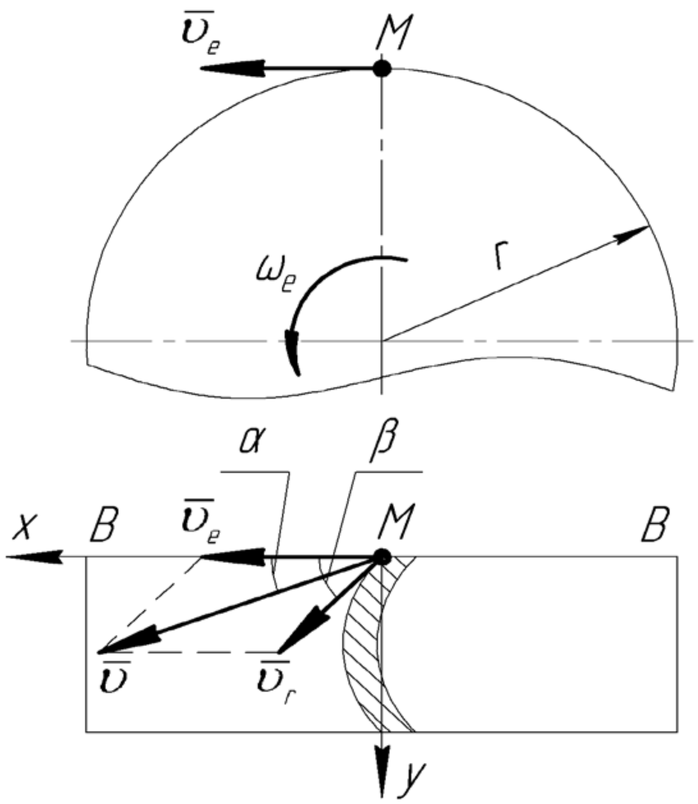

Рис. 4.8

где $\bar{\upsilon}_r$ – относительная скорость точки; направлена по касательной к лопатке, т.е. под углом β к плоскости *BB* (рис. 4.8);

$\bar{\upsilon}_e$ – переносная скорость точки; направлена перпендикулярно радиусу ротора.

Выберем оси координат и спроектируем на них уравнение (4.33):

- на ось *x* $\quad \upsilon\cos\alpha = \upsilon_e + \upsilon_r\cos\beta$, (4.34)

- на ось *y* $\quad \upsilon\sin\alpha = \upsilon_r\sin\beta$. (4.35)

Из второго уравнения найдем относительную скорость частицы пара:

$$\upsilon_r = \frac{\upsilon\sin 20°}{\sin 45°} = \frac{1200 \cdot 0,342}{0,707} = 580 \text{ м/с}, \tag{4.36}$$

а из первого – переносную скорость:

$$\upsilon_e = \upsilon \cos 20° - \upsilon_r \cos 45° = 1200 \cdot 0,94 - 580 \cdot 0,707 = 718 \; м/с. \qquad (4.37)$$

Угловая скорость ротора:

$$\omega_e = \frac{\upsilon_e}{r} = \frac{718}{1,2} = 598 \; рад/с. \qquad (4.38)$$

Частота вращения ротора:

$$n = \frac{30\omega_e}{\pi} = \frac{30 \cdot 598}{3,14} = 5713 \; об/мин. \qquad (4.39)$$

Задача 4.7. При изменении угловой скорости маховика стержень O_1A регулятора поворачивается вокруг оси O_1 (рис. 4.9, *а*). Маховик, вращающийся с частотой *360 об/мин*, получает мгновенное угловое ускорение $\varepsilon_e = 12 \; рад/с^2$. Стержень O_1A имеет угловое ускорение $\varepsilon_r = 18 \; рад/с^2$, а скорость точки A относительно оси O_1 составляет $\upsilon_r = 1 \; м/с$. Определить абсолютное ускорение точки A в момент, когда точки O и O_1 находятся на одной вертикали, если $\angle OAO_1 = 90°$, а расстояния $O_1A = 0,3 \; м$, $OA = 0,4 \; м$.

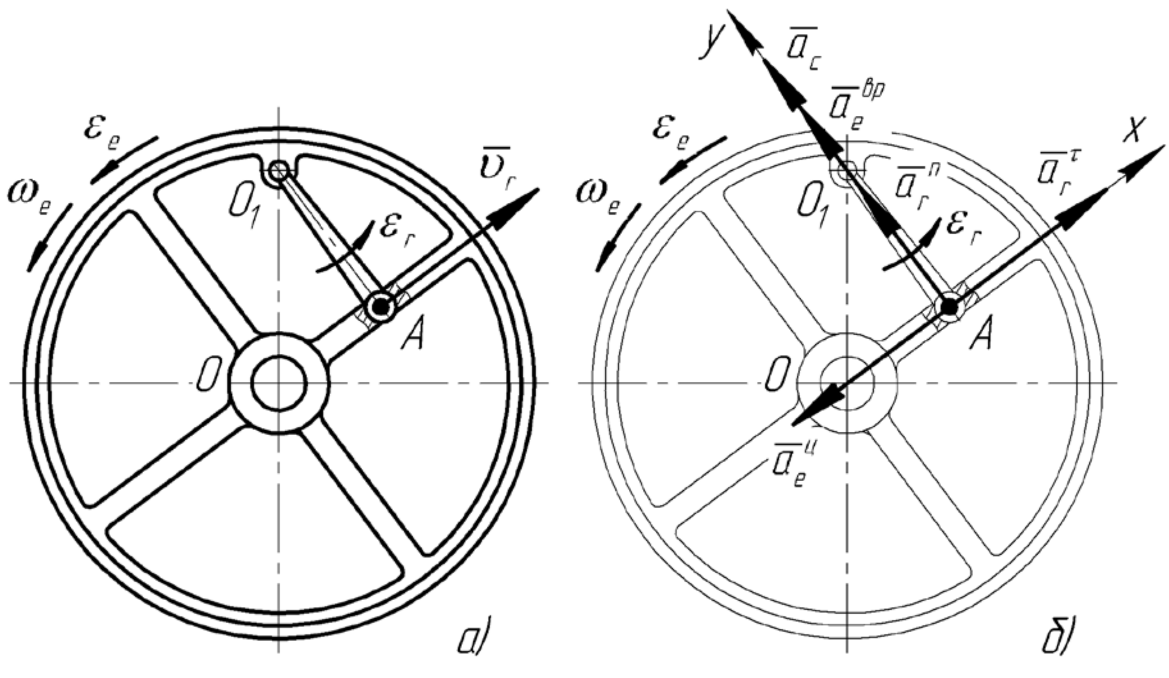

Рис. 4.9

Решение:

Переносным движением будет вращение маховика, а относительным – движение точки относительно оси O_1.

Угловая скорость переносного вращения:

$$\omega_e = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 360}{30} = 37,7 \; рад/с. \qquad (4.40)$$

Абсолютное ускорение точки A по теореме Кориолиса равно:

$$\overline{a} = \overline{a}_e^ц + \overline{a}_e^{вр} + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c. \qquad (4.41)$$

Найдем все слагаемые абсолютного ускорения точки *A*.

Центростремительная и вращательная составляющие переносного ускорения равны:

$$a_e^ц = \omega_e^2 \cdot OA = 37{,}7^2 \cdot 0{,}4 = 568{,}5 \ м/с^2, \qquad (4.42)$$

$$a_e^{вр} = \varepsilon_e \cdot OA = 12 \cdot 0{,}4 = 4{,}8 \ м/с^2. \qquad (4.43)$$

Вектор $\overline{a}_e^ц$ будет направлен к оси маховика – к точке *O*, а вектор $\overline{a}_e^{вр}$ – перпендикулярно *OA* в сторону ε_e (рис. 4.9, *б*).

Нормальная и касательная составляющие относительного ускорения равны:

$$a_r^n = \frac{\upsilon_r^2}{O_1A} = \frac{1^2}{0{,}3} = 3{,}3 \ м/с^2, \qquad (4.44)$$

$$a_r^\tau = \varepsilon_r \cdot O_1A = 18 \cdot 0{,}3 = 5{,}4 \ м/с^2. \qquad (4.45)$$

Вектор $\overline{a}_r^n$ направлен вдоль стержня к оси O_1, а вектор $\overline{a}_r^\tau$ – перпендикулярно стержню в сторону направления ε_r.

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_c = 2\omega_e \cdot \upsilon_r \cdot \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right). \qquad (4.46)$$

Т.к. вектор $\overline{\omega}_e$ будет направлен перпендикулярно плоскости чертежа, то угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$ равен 90°. Тогда:

$$a_c = 2 \cdot 37{,}7 \cdot 1 \cdot 1 = 75{,}4 \ м/с^2. \qquad (4.47)$$

Вектор $\overline{\upsilon}_r$ находится в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{\omega}_e$. Повернем вектор $\overline{\upsilon}_r$ на 90° в сторону переносной угловой скорости ω_e и получим направление вектора $\overline{a}_c$.

Выберем оси координат и спроецируем на них уравнение (4.41):

$$a_x = a_e^ц - a_r^\tau = 568{,}5 - 5{,}4 = 563{,}1 \ м/с^2, \qquad (4.48)$$

$$a_y = a_e^{вр} + a_r^n + a_c = 4{,}8 + 3{,}3 + 75{,}4 = 83{,}5 \ м/с^2. \qquad (4.49)$$

Модуль абсолютного ускорения точки *A*:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{563{,}1^2 + 83{,}5^2} = 569{,}3 \ м/с^2. \qquad (4.50)$$

Задача 4.8. Центробежный регулятор Уатта (рис. 4.10, *а*) в данный момент времени имеет угловую скорость $\omega = 10 \ рад/с$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4 \ рад/с^2$. При изменении нагрузки машины шары регулятора отходят от оси вращения, имея для своих стержней угловую скорость $\omega_1 = 1{,}2 \ рад/с$ и угловое ускорение $\varepsilon_1 = 2 \ рад/с^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $l = 0{,}5 \, м$, расстояние между осями их подвеса $2e = 0{,}1\,м$; углы, образованные стержнями с осью вращения регулятора, $\alpha = 30°$.

Решение:

В данном механизме переносным движением будет вращение регулятора относительно неподвижной оси *AB*. Значит, переносная скорость шара будет равна:

$$\upsilon_e = \omega r, \tag{4.51}$$

где $r = e + l\sin\alpha$ – расстояние от шара до оси вращения регулятора.

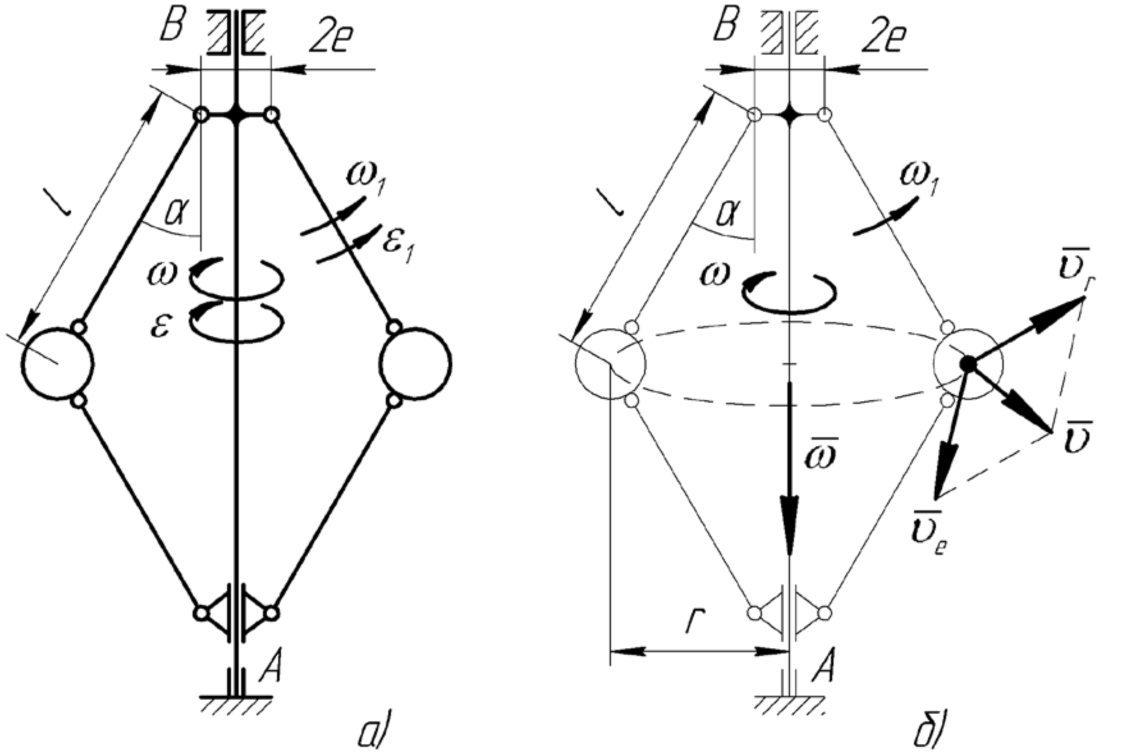

Рис. 4.10

Тогда:

$$r = 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}3\,м, \tag{4.52}$$

$$\upsilon_e = 10 \cdot 0{,}3 = 3\ м/с. \tag{4.53}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_e$ будет направлен по касательной к описываемой шаром окружности (т.е. перпендикулярно плоскости чертежа) в сторону вращения регулятора (рис. 4.10, *б*).

Относительным движением будет вращение шара вместе со стержнем относительно регулятора. Тогда относительная скорость:

$$\upsilon_r = \omega_1 l = 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6\ м/с. \tag{4.54}$$

Вектор $\bar{\upsilon}_r$ будет направлен перпендикулярно стержню регулятора в сторону вращения стержня.

Т.к. в пространстве между векторами $\bar{\upsilon}_e$ и $\bar{\upsilon}_r$ будет прямой угол, то модуль абсолютной скорости составит:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2} = \sqrt{3^2 + 0{,}6^2} = 3{,}06\ м/с. \tag{4.55}$$

Абсолютное ускорение шара регулятора по теореме Кориолиса:

$$\overline{a} = \overline{a}_e^{ц} + \overline{a}_e^{вр} + \overline{a}_r^{n} + \overline{a}_r^{\tau} + \overline{a}_c. \qquad (4.56)$$

Найдем все слагаемые абсолютного ускорения шара.

Центростремительная и вращательная составляющие переносного ускорения равны:

$$a_e^{ц} = \omega^2 r = 10^2 \cdot 0,3 = 30 \ м/с^2, \qquad (4.57)$$

$$a_e^{вр} = \varepsilon r = 4 \cdot 0,3 = 1,2 \ м/с^2. \qquad (4.58)$$

Вектор $\overline{a}_e^{ц}$ будет направлен к центру окружности, описываемой шаром при переносном движении, а вектор $\overline{a}_e^{вр}$ – по касательной к этой окружности в сторону заданного направления ε (рис. 4.11).

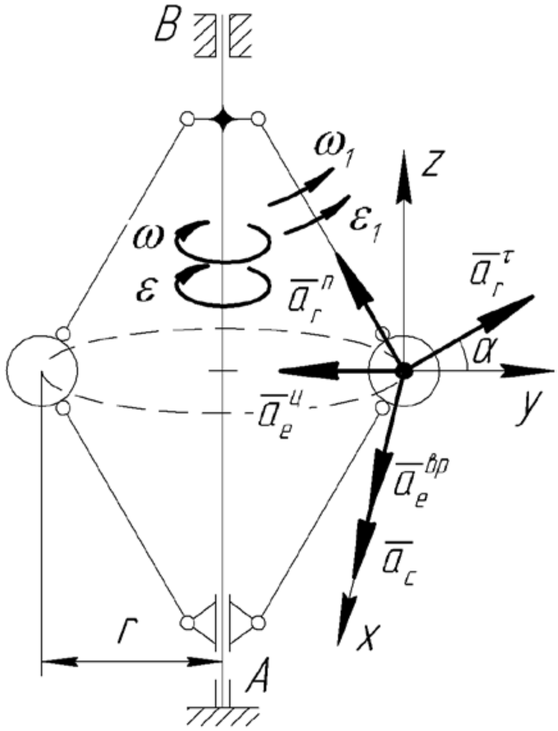

Рис. 4.11

Нормальная и касательная составляющие относительного ускорения шара равны:

$$a_r^{n} = \omega_1^2 l = 1,2^2 \cdot 0,5 = 0,72 \ м/с^2, \qquad (4.59)$$

$$a_r^{\tau} = \varepsilon_1 l = 2 \cdot 0,5 = 1 \ м/с^2. \qquad (4.60)$$

Вектор $\overline{a}_r^{n}$ направлен вдоль стержня, а вектор $\overline{a}_r^{\tau}$ – перпендикулярно стержню в сторону направления ε_1.

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_c = 2\omega \cdot \upsilon_r \cdot \sin\left(\overline{\omega}, \overline{\upsilon}_r\right). \qquad (4.61)$$

Вектор $\overline{\omega}$ будет направлен вдоль оси *AB* вращения регулятора вниз (рис. 4.11, *б*), следовательно, угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{\upsilon}_r$ равен 120°.

Тогда:

$$a_c = 2\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}866 = 10{,}39 \ м/с^2 . \qquad (4.62)$$

Чтобы определить направление вектора $\overline{a}_c$, спроектируем вектор $\overline{\upsilon}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{\omega}$, и повернем полученную проекцию на 90° в сторону переносного вращения. В итоге вектор $\overline{a}_c$ будет совпадать по направлению с вектором $\overline{a}_e^{вр}$ (рис. 4.11).

Выберем оси координат и спроецируем на них уравнение (4.56):

$$a_x = a_e^{вр} + a_c = 1{,}2 + 10{,}39 = 11{,}59 \ м/с^2 , \qquad (4.63)$$

$$a_y = -a_e^{ц} - a_r^{n}\sin\alpha + a_r^{\tau}\cos\alpha =$$

$$= -30 - 0{,}72\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}866 = -29{,}49 \ м/с^2 , \qquad (4.64)$$

$$a_z = a_r^{n}\cos\alpha + a_r^{\tau}\sin\alpha = 0{,}72\cdot 0{,}866 + 1\cdot 0{,}5 = 1{,}12 \ м/с^2 . \qquad (4.65)$$

Модуль абсолютного ускорения шара:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{11{,}59^2 + \left(-29{,}49\right)^2 + 1{,}12^2} = 31{,}71 \ м/с^2 . \qquad (4.66)$$

Задача 4.9. Для рыхления почвы применяют фрезерный рабочий орган (фрезерный барабан), состоящий из системы ножей (рис. 4.12, *а*). При неустановившемся режиме работы скорость агрегата составляет $\upsilon_O = 1 \ м/с$, а ускорение – $a_O = 2 \ м/с^2$. Определить скорость и ускорение конца ножа *OM*, находящегося под углом $\varphi = 30°$ к направлению движения агрегата, если угловая скорость барабана $\omega = 25 \ рад/с$, а его угловое ускорение – $\varepsilon = 10 \ рад/с^2$. Радиус барабана $r = 400 \ мм$.

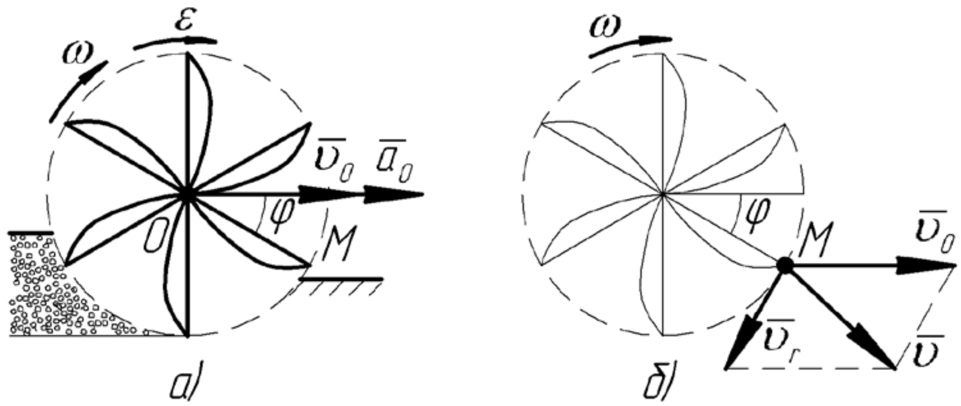

Рис. 4.12

Решение:

Скорость движения агрегата $\overline{\upsilon}_O$ будет являться переносной скоростью (направлена в сторону движения агрегата), а скорость движения точки *M* относительно оси *O* вращающегося барабана – относительной скоростью

Модуль относительной скорости:

$$\upsilon_r = \omega r = 25 \cdot 0,4 = 10 \ м/с. \qquad (4.67)$$

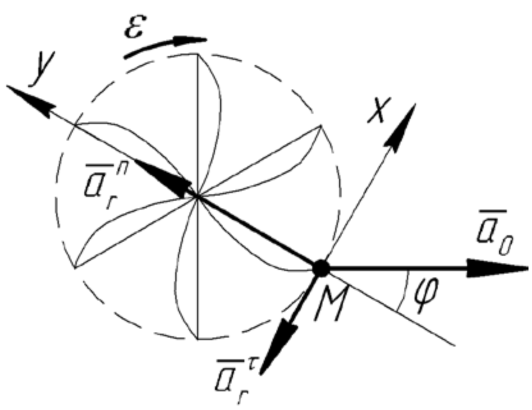

Рис. 4.13

Вектор $\overline{\upsilon}_r$ направлен по касательной к описываемой точкой при относительном движении окружности (рис. 4.12, *б*).

Абсолютная скорость точки *M* будет равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей, а ее модуль составит:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_O^2 + \upsilon_r^2 + 2\upsilon_O \upsilon_r \cos\left(\overline{\upsilon}_O, \overline{\upsilon}_r\right)}. \qquad (4.68)$$

Учитывая, что угол между векторами $\overline{\upsilon}_O$ и $\overline{\upsilon}_r$ составляет 120°, получим:

$$\upsilon = \sqrt{1^2 + 10^2 + 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot (-0,5)} = 9,5 \ м/с. \qquad (4.69)$$

Абсолютное ускорение точки *M*:

$$\overline{a} = \overline{a}_O + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c. \qquad (4.70)$$

В этом уравнении ускорение $\overline{a}_O$ будет являться переносным ускорением, а кориолисово ускорение будет равно нулю ($a_c = 0$), т.к. переносное движение – поступательное.

Нормальная и касательная составляющие относительного ускорения точки *M* равны:

$$a_r^n = \omega^2 r = 25^2 \cdot 0,4 = 250 \ м/с^2, \qquad (4.71)$$

$$a_r^\tau = \varepsilon r = 10 \cdot 0,4 = 4 \ м/с^2. \qquad (4.72)$$

Вектор $\overline{a}_r^n$ направлен к центру окружности, описываемой точкой при относительном движении, а вектор $\overline{a}_r^\tau$ – по касательной к этой окружности в сторону направления ε_1 (рис. 4.13).

Выберем координатные оси и спроектируем на них уравнение (4.70):

$$a_x = a_O \sin\varphi - a_r^\tau = 2 \cdot 0,5 - 4 = -3 \ м/с^2, \qquad (4.73)$$

$$a_y = -a_O \cos\varphi + a_r^n = -2 \cdot 0,866 + 250 = 245,3 \ м/с^2. \qquad (4.74)$$

Модуль абсолютного ускорения точки *M*:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 245,3^2} = 245,3 \ м/с^2. \qquad (4.75)$$

Задача 4.10. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания, равным *R*, катится без скольжения по горизонтальной плоскости π, так что скорость υ центра основания – точки A – постоянна по величине (рисю 4.14, *а*). Вдоль прямолинейного канала, проходящего из вершины O конуса в точку A, равномерно движется точка M со скоростью, величина которой тоже равна υ. Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент прохождения ею центра основания A.

Решение:

Движение точки M по каналу OA будет являться относительным движением. В свою очередь, вращение канала OA вокруг оси, проходящей из точки O перпендикулярно плоскости π, будет являться переносным движением.

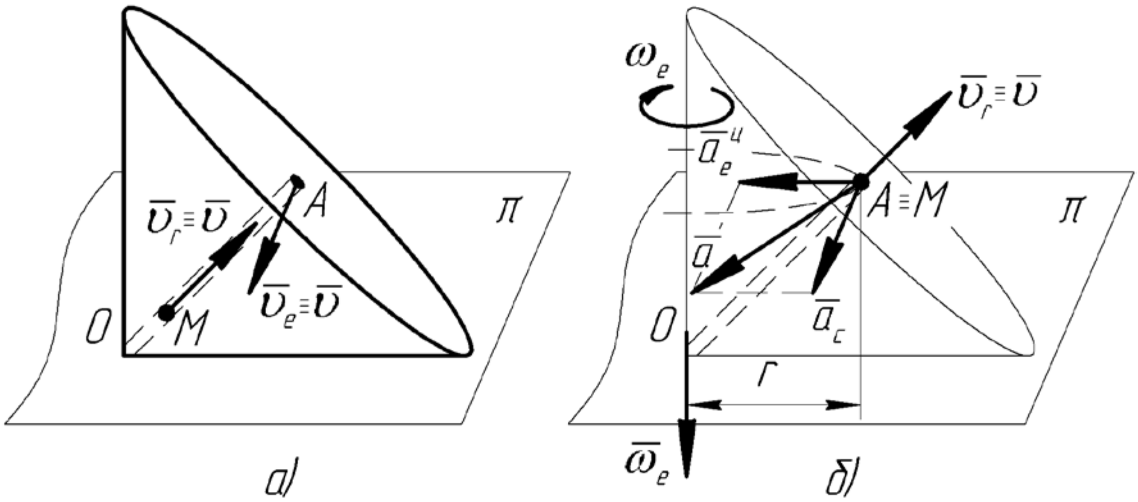

Рис. 4.14

В рассматриваемый момент времени точка M будет совпадать с центром основания A (рис. 4.14, *б*), и при переносном движении будет описывать окружность радиусом, равным:

$$r = R\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}R. \qquad (4.76)$$

Тогда переносная угловая скорость:

$$\omega_e = \frac{\upsilon_e}{r} = \frac{2\upsilon}{\sqrt{2}R} = \sqrt{2}\cdot\frac{\upsilon}{R}. \qquad (4.77)$$

Абсолютное ускорение точки M:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^ц + \bar{a}_e^{вр} + \bar{a}_c. \qquad (4.78)$$

Т.к. и переносное, и относительное движение точки носят равномерный характер, то относительное (a_r) и вращательное переносное ускорения ($a_e^{вр}$) будут равны нулю.

Центростремительное переносное ускорение:

$$a_e^ц = \omega_e^2 r = \left(\sqrt{2}\cdot\frac{\upsilon}{R}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R = \sqrt{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4.79)$$

Кориолисово ускорение:

$$a_c = 2\omega_e \upsilon_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right) = 2\omega_e \upsilon \sin 135° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\upsilon}{R} \cdot \upsilon \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\upsilon^2}{R}. \qquad (4.80)$$

Вектор $\overline{a}_e^ц$ направлен к центру окружности, описываемой точкой *M* при переносном вращении, вектор $\overline{a}_c$ – по касательной к этой окружности (рис. 4.14, *б*).

Т.к. между векторами $\overline{a}_e^ц$ и $\overline{a}_c$ в пространстве прямой угол, то модуль абсолютного ускорения точки *M* будет равен:

$$a = \sqrt{\left(a_e^ц\right)^2 + a_c^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\upsilon^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{2\upsilon^2}{R}\right)^2} = \sqrt{6} \cdot \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4.81)$$

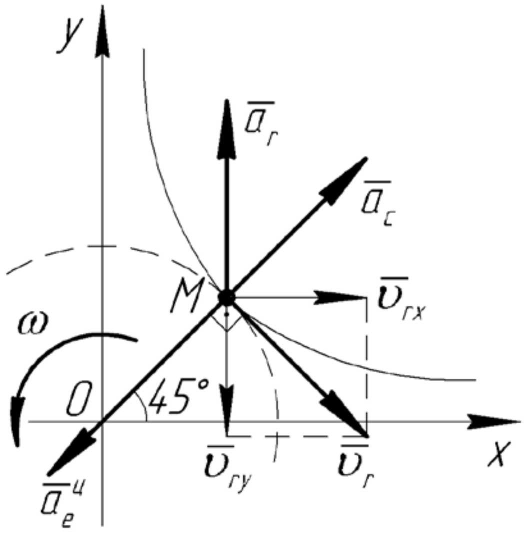

Рис. 4.15

Задача 4.11. Плоскость, в которой движется точка *M* согласно уравнениям

$$x = t, \qquad y = \frac{9}{t} \qquad (4.82)$$

(*x*, *y* – в сантиметрах), вращается вокруг начала координат *O* против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega = 1\ рад/с$. Определить величину абсолютного ускорения этой точки в тот момент, когда она находится на кратчайшем расстоянии от точки *O*.

Решение:

Движение точки *M* по траектории согласно уравнениям (4.82) является относительным движением, а вращение плоскости – переносным.

Исключив из уравнений (4.82) параметр *t*, получим уравнение траектории точки *M* (уравнение гиперболы, рис. 4.15):

$$y = \frac{9}{x}. \qquad (4.83)$$

Найдем расстояние от точки *M* до начала координат *O*:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^2 + \frac{81}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{t^4 + 81}. \qquad (4.84)$$

Чтобы найти время t_1, когда расстояние *OM* будет минимальным, продифференцируем выражение (4.84) по времени и приравняем его к нулю:

$$\frac{d}{dt}(OM) = -\frac{1}{t^2}\sqrt{t^4 + 81} + \frac{1}{t} \cdot \frac{4t^3}{2\sqrt{t^4 + 81}} = 0, \qquad (4.85)$$

откуда

$$\frac{2t^2}{\sqrt{t^4+81}}-\frac{\sqrt{t^4+81}}{t^2}=0. \tag{4.86}$$

Домножая уравнение на $t^2\sqrt{t^4+81}$ и подставляя $t=t_1$, найдем:

$$t_1=\sqrt[4]{81}=3\ с. \tag{4.87}$$

Подставим значение t_1 в уравнения движения точки и найдем положение точки в этот момент времени:

$$x=3\ см,\quad y=9/3=3\ см. \tag{4.88}$$

Отметим точку *M* на траектории (рис. 4.15).

Расстояние *OM* в этом положении будет равно:

$$OM=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^4+81}=3\sqrt{2}\ см. \tag{4.89}$$

По теореме Кориолиса абсолютное ускорение точки *M* равно:

$$\overline{a}=\overline{a}_e^ц+\overline{a}_e^{вр}+\overline{a}_r+\overline{a}_c. \tag{4.90}$$

Переносное центростремительное ускорение:

$$a_e^ц=\omega^2\cdot OM=1^2\cdot 3\sqrt{2}=3\sqrt{2}\ \ см/с^2. \tag{4.91}$$

Вектор $\overline{a}_e^ц$ будет направлен к центру окружности, описываемой точкой *M* при переносном движении (на рис. 4.15 дуга этой окружности показана штриховой линией), т.е. к точке *O*.

Переносное вращательное ускорение $a_e^{вр}=0$, т.к. $\omega=const$.

Проекции относительной скорости на координатные оси:

$$\upsilon_{rx}=\dot{x}=1\ см/с,\quad \upsilon_{ry}=\dot{y}=-\frac{9}{t^2}. \tag{4.92}$$

В момент времени $t=t_1$ $\upsilon_{ry}=-1\ см/с$, а модуль относительной скорости равен:

$$\upsilon_r=\sqrt{\upsilon_{rx}^2+\upsilon_{ry}^2}=\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{2}\ \ см/с. \tag{4.93}$$

Направление вектора $\overline{\upsilon}_r$ найдем, отложив составляющие вектора по координатным осям (рис. 4.15, вектор $\overline{\upsilon}_r$ будет направлен под углом 45° к оси *x*).

Проекции относительного ускорения на координатные оси:

$$a_{rx}=\dot{\upsilon}_{rx}=0,\quad a_{ry}=\dot{\upsilon}_{ry}=2\cdot\frac{9}{t^3}=\frac{18}{t^3}. \tag{4.94}$$

В момент времени $t=t_1$ $a_{ry}=2/3\ \ см/с^2$, а модуль относительного ускорения равен:

$$a_r=\sqrt{a_{rx}^2+a_{ry}^2}=a_{ry}=\frac{2}{3}\ \ см/с^2. \tag{4.95}$$

Направление вектора $\overline{a}_r$ будет совпадать с направлением составляющей $\bar{a}_{ry}$.

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_c = 2\omega \upsilon_r \sin\left(\bar{\omega}, \bar{\upsilon}_r\right). \tag{4.96}$$

Т.к. вектор $\bar{\omega}$ будет направлен перпендикулярно плоскости чертежа, то угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{\upsilon}_r$ равен 90°. Тогда:

$$a_c = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 90° = 2\sqrt{2} \;\; см/с^2. \tag{4.97}$$

Повернув вектор $\bar{\upsilon}_r$ на 90° в сторону направления ω (т.е. против часовой стрелки), получим направление вектора $\bar{a}_c$.

Спроектируем уравнение (4.90) на координатные оси:

$$a_x = -a_e^ц \cos 45° + a_c \cos 45° = -3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \;\; см/с^2, \tag{4.98}$$

$$a_y = -a_e^ц \sin 45° + a_r + a_c \sin 45° =$$

$$= -3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{3} \;\; см/с^2. \tag{4.99}$$

Абсолютное ускорение точки *M*:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \;\; см/с^2. \tag{4.100}$$

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сложным называется такое движение твердого тела, при котором оно участвует в нескольких одновременно происходящих движениях.

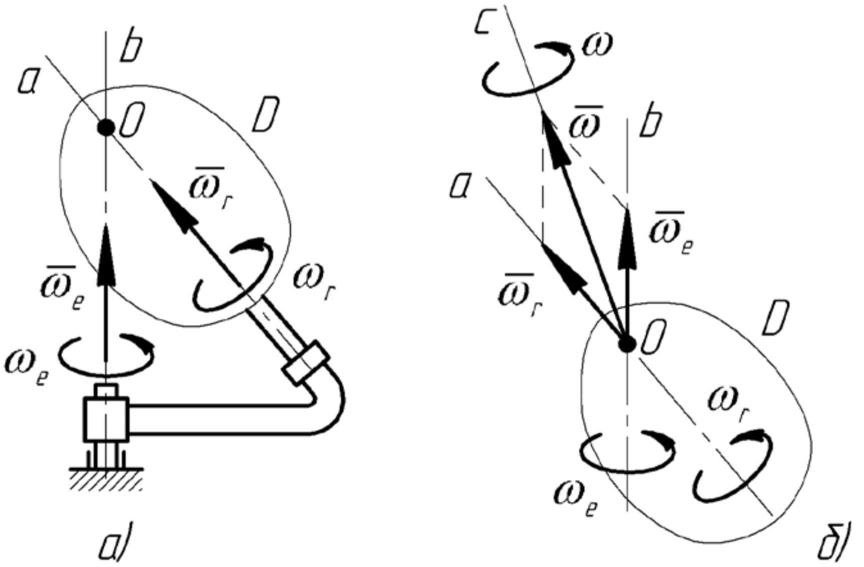

Рис. 5.1

Сложение угловых скоростей. Пусть твердое тело *D* (рис. 5.1, *а*) вращается вокруг оси *a* и одновременно с осью *a* – вокруг оси *b*. Относительное вращение тела происходит с угловой скоростью $\overline{\omega}_r$ (вектор $\overline{\omega}_r$ направлен вдоль оси *a*), переносное вращение – с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$ (вектор $\overline{\omega}_e$ направлен вдоль оси *b*).

При сложении вращений вокруг двух осей a и b, пересекающихся в точке O, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси c, проходящей через точку O. Угловая скорость этого вращения (абсолютная угловая скорость) будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей (рис. 5.1, *б*):

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e . \qquad (5.1)$$

Мгновенная ось *c* направлена вдоль вектора $\overline{\omega}$, т.е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$.

Скорости всех точек, принадлежащих мгновенной оси *c*, в данный момент времени равны нулю, а скорость любой точки тела *D*:

$$\upsilon = \omega \cdot h , \qquad (5.2)$$

где *h* – расстояние от точки до мгновенной оси.

Сложение угловых ускорений. *Абсолютное угловое ускорение тела, вращающегося неравномерно вокруг двух пересекающихся осей, равно геометрической сумме его относительного, переносного и поворотного угловых ускорений:*

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_r + \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_c , \qquad (5.3)$$

где $\overline{\varepsilon}_r$ – относительное угловое ускорение;

$\overline{\varepsilon}_e$ – переносное угловое ускорение;

$\overline{\varepsilon}_c$ – поворотное угловое ускорение.

Модуль и направление векторов $\overline{\varepsilon}_r$ и $\overline{\varepsilon}_e$, можно определить, пользуясь рекомендациями, данными в **главе 2**. Поворотное угловое ускорение можно найти как векторное произведение переносной угловой скорости на относительную угловую скорость:

$$\overline{\varepsilon}_c = \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r, \qquad (5.4)$$

или абсолютной угловой скорости на относительную угловую скорость:

$$\overline{\varepsilon}_c = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_r. \qquad (5.5)$$

Модуль поворотного углового ускорения:

$$\varepsilon_c = \omega_e \omega_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r\right), \qquad (5.6)$$

или

$$\varepsilon_c = \omega \cdot \omega_r \sin\left(\overline{\omega}, \overline{\omega}_r\right). \qquad (5.7)$$

Вектор $\overline{\varepsilon}_c$ будет направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}_e$ ($\overline{\omega}$) и $\overline{\omega}_r$ в ту сторону, откуда поворот от вектора $\overline{\omega}_e$ ($\overline{\omega}$) к вектору $\overline{\omega}_r$ будет виден происходящим против часовой стрелки.

Ускорение точки *M* тела можно найти как геометрическую сумму нормальной и касательной составляющих:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^n + \overline{a}_M^\tau. \qquad (5.8)$$

Модули этих составляющих равны:

$$a_M^n = \omega^2 \cdot h, \qquad (5.9)$$

$$a_M^\tau = \varepsilon \cdot d, \qquad (5.10)$$

где h – расстояние от точки *M* до мгновенной оси;

d – расстояние от точки *M* до линии действия вектора $\overline{\varepsilon}$.

Тогда модуль ускорения:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2}. \qquad (5.11)$$

Также ускорение точки тела можно найти, рассматривая движение точки как сложное (см. **главу 4**).

Расчет цилиндрических зубчатых передач.

Зубчатые передачи образованы зубчатыми колесами (шестернями), находящимися в последовательном зацеплении.

Рядовой называется зубчатая передача, у которой все оси колес, находящихся в зацеплении, неподвижны (рис. 5.2). При этом колесо, приводящее весь механизм в движение (колесо *1* на рис. 5.2), называется *ведущим*, а все остальные колеса – *ведомыми*. Передачи могут быть как с внешним (рис. 5.2, *а*, *в*), так и с внутренним (рис. 5.2, *б*) зацеплением.

Кинематические характеристики рядовых зубчатых передач можно рассчитать, как было показано в задаче 2.6.

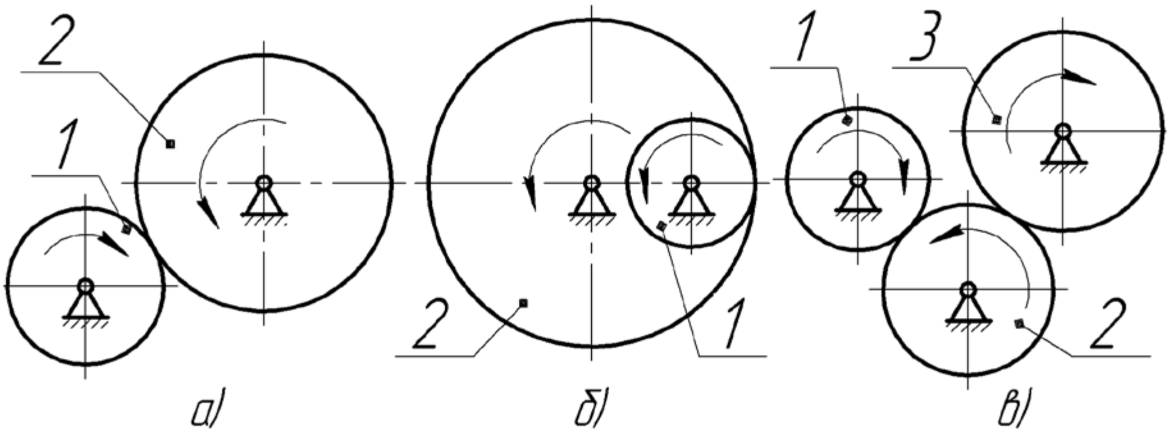

Рис. 5.2

Рассматривая скорость точки зацепления двух колес и, учитывая, что при внешнем зацеплении колеса вращаются в разные стороны, а при внутреннем – в одну сторону:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{внеш} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{внутр} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \tag{5.12}$$

где r_2 и r_1 – соответственно радиусы ведомого и ведущего колес;

z_2 и z_1 – число зубьев соответствующего колеса.

При рядовом сцеплении, состоящем из *n* колес:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m \cdot \frac{r_n}{r_1} = (-1)^m \cdot \frac{z_n}{z_1}, \tag{5.13}$$

где *m* – число внешних зацеплений (для рис. 5.2, *а* – $m = 1$, для рис. 5.2, *б* – $m = 0$, для рис. 5.2, *в* – $m = 2$).

Передаточным отношением зубчатой передачи называется величина i_{1n}, равная отношению угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \tag{5.14}$$

Так, например, для передачи, изображенной на рис. 5.2, *в*, передаточное число составит:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}. \tag{5.15}$$

Также передаточное число можно найти, используя правую часть формулы (5.13).

Планетарной называется передача, в которой колесо *1* неподвижно, а оси остальных колес, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе (*водиле*) *ОВ,* вращающемся вокруг оси неподвижного колеса *1* (рис. 5.3, *а*).

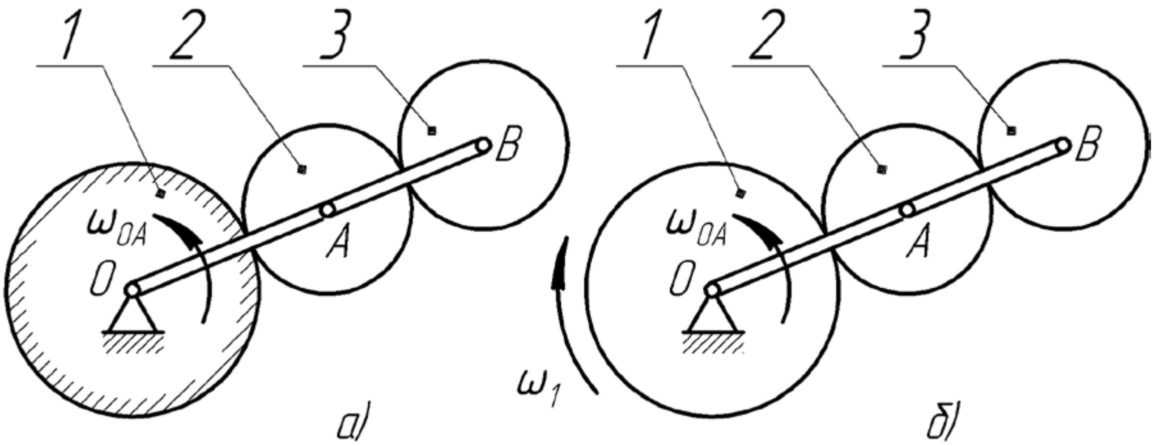

Рис. 5.3

Дифференциальной называется передача, если в ней колесо *1* не является неподвижным и может вращаться вокруг своей оси *O* независимо от водила *OB* (рис. 5.3, *б*).

Для расчета планетарных и дифференциальных передач применяют следующие методы:

1) Метод остановки (метод Виллиса) заключается в том, что кривошипу *OB* мысленно сообщают угловую скорость $-\omega_{OB}$, т.е. равную по модулю угловой скорости ω_{OB} кривошипа, но противоположную по направлению. Тогда кривошип будет неподвижен, а передачу можно рассматривать как рядовую.

Угловую скорость *k*-ого (любого) колеса после остановки найдем по формуле:

$$\omega_k' = \omega_k - \omega_{OB}, \tag{5.16}$$

где *k* – номер колеса;

ω_k – угловая скорость *k*-ого колеса до остановки (абсолютная угловая скорость).

2. Расчет с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС) рассмотрен в **главе 3**.

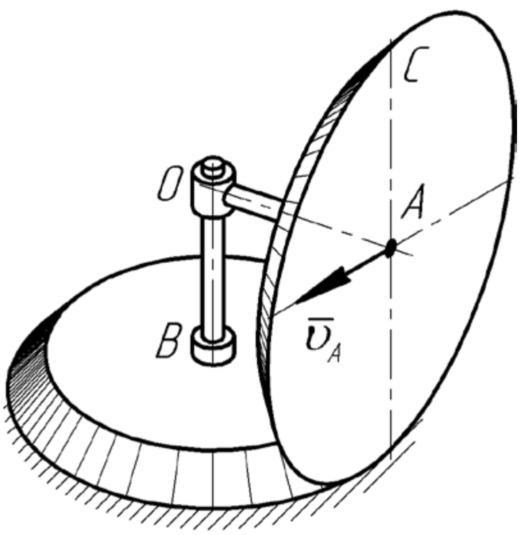

Рис. 5.4

Задача 5.1. Определить абсолютную угловую скорость ω конического колеса и скорость точки *C*, если $AC = R$, $OA = l$ и скорость точки *A* равна υ_A (рис. 5.4).

Решение:

Движение колеса рассмотрим, как слагающееся из относительного вращения вокруг оси *OA* и переносного вращения вокруг оси *OB*.

Переносная угловая скорость:

$$\omega_e = \frac{\upsilon_A}{l}. \tag{5.17}$$

Вектор $\bar{\omega}_e$ будет направлен вдоль оси *OB* вниз (рис. 5.5). Скорости точек *O* и *D* в данный момент времени будут равны нулю (точка *O* принадлежит оси вращения *OB*, а *D* – точка касания колесом неподвижной конической поверхности).

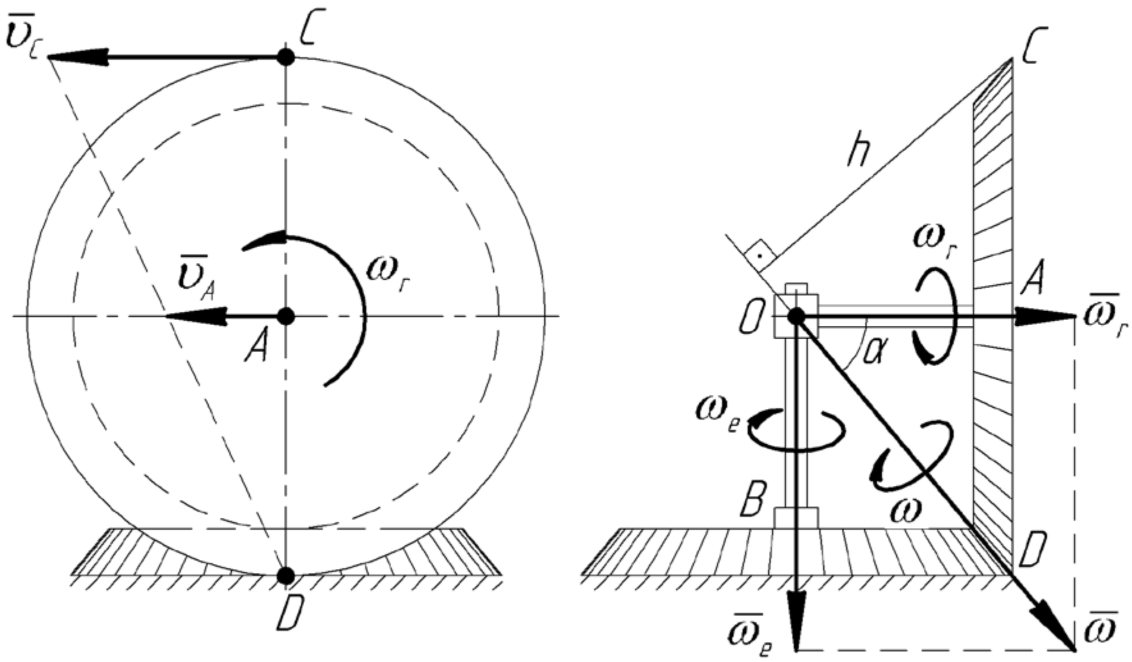

Рис. 5.5

Следовательно, *OD* будет являться мгновенной осью, а вектор $\bar{\omega}$ абсолютной угловой скорости будет направлен вдоль этой оси. В то же время, вектор $\bar{\omega}_r$ относительной угловой скорости направлен вдоль оси *OA*.

Построим параллелограмм скоростей (рис. 5.5).

Модуль абсолютной угловой скорости:

$$\omega = \frac{\omega_e}{\sin\alpha}, \tag{5.18}$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_r$.

Учитывая, что

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}, \tag{5.19}$$

окончательно получим:

$$\omega = \frac{\upsilon_A \sqrt{R^2 + l^2}}{Rl}, \tag{5.20}$$

Определим скорость точки *C*:

$$\upsilon_C = \omega h, \tag{5.21}$$

где $h = 2R\cos\alpha$ – расстояние от точки C до мгновенной оси OD.

Здесь

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}, \tag{5.22}$$

тогда:

$$\upsilon_C = \frac{\upsilon_A\sqrt{R^2 + l^2}}{Rl} \cdot 2R \cdot \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} = 2\upsilon_A. \tag{5.23}$$

Тот же самый результат получим, зная, что МЦС колеса будет находиться в точке D:

$$\frac{\upsilon_A}{R} = \frac{\upsilon_C}{2R}, \tag{5.24}$$

откуда $\upsilon_C = 2\upsilon_A$.

Задача 5.2. Шестерня *1* радиусом r находится в зацеплении с неподвижным колесом *2* радиусом $R = 2r$, и приводится в движение валом *3* (рис. 5.6, *а*), вращающимся равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon_e = \frac{\pi}{2}\ рад/с^2$, имея в начальный момент угловую скорость $\omega_0 = \pi\ рад/с$. Определить в момент $t = 1\ с$ угловую скорость и угловое ускорение шестерни.

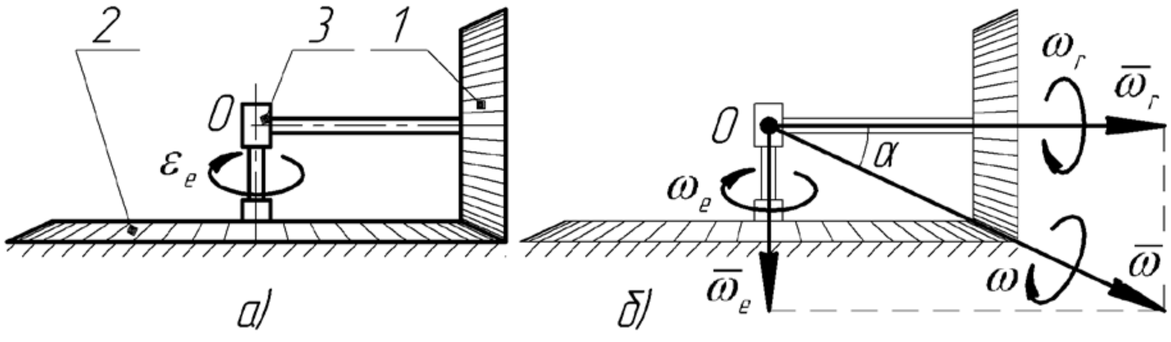

Рис. 5.6

Решение:

Т.к. вал *3* вращается равноускоренно, то переносная угловая скорость будет равна:

$$\omega_e = \omega_0 + \varepsilon_e t = \pi + \frac{\pi}{2}t = \pi\left(1 + \frac{t}{2}\right). \tag{5.25}$$

Вектор $\overline{\omega}_e$ будет направлен вдоль оси вращения вала *3*, вектор $\overline{\omega}_r$ относительной угловой скорости – вдоль оси вращения шестерни, а вектор $\overline{\omega}$ абсолютной угловой скорости – вдоль мгновенной оси (рис. 5.6, *б*).

В получившемся прямоугольнике абсолютная и относительная угловые скорости составят:

$$\omega = \frac{\omega_e}{\sin\alpha}, \quad \omega_r = \omega\cos\alpha\,, \tag{5.26}$$

где α – угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_r$.

В соответствующем прямоугольном треугольнике:

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tag{5.27}$$

$$\cos\alpha = \frac{2r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \tag{5.28}$$

Тогда:

$$\omega = \pi\left(1 + \frac{t}{2}\right)\cdot\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\pi\left(1 + \frac{t}{2}\right), \tag{5.29}$$

$$\omega_r = \sqrt{5}\pi\left(1 + \frac{t}{2}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\pi\left(1 + \frac{t}{2}\right). \tag{5.30}$$

В момент времени $t = 1\ c$ угловые скорости составят:

$$\omega_e = \frac{3}{2}\pi\,, \quad \omega_r = 3\pi\,, \quad \omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \tag{5.31}$$

Переносное и относительное угловое ускорения найдем как производные по времени от уравнений (5.3) и (5.4) соответствующих угловых скоростей:

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_r = \dot{\omega}_r = \pi\,. \tag{5.32}$$

Т.к. эти значения положительны, то направления векторов $\overline{\varepsilon}_e$ и $\overline{\varepsilon}_r$ совпадают с направлениями $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$ (рис. 5.7).

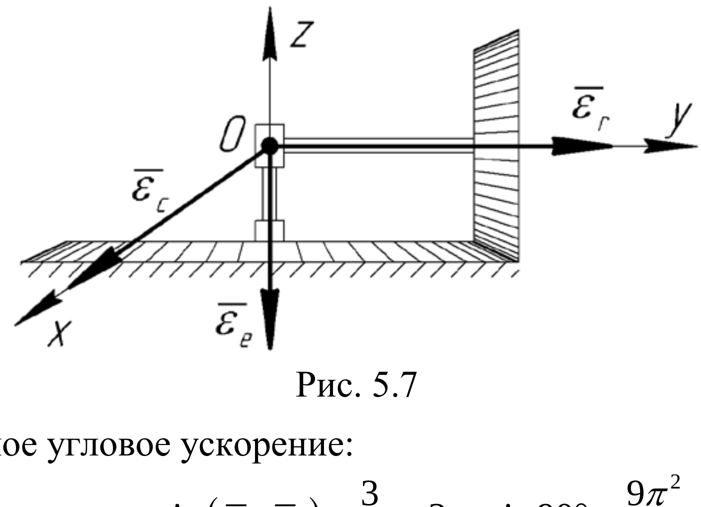

Рис. 5.7

Поворотное угловое ускорение:

$$\varepsilon_c = \omega_e\omega_r\sin(\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r) = \frac{3}{2}\pi\cdot 3\pi\cdot\sin 90^\circ = \frac{9\pi^2}{2}. \tag{5.33}$$

Вектор $\bar{\varepsilon}_c$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$, к зрителю.

Таким образом, все три вектора – $\bar{\varepsilon}_e$, $\bar{\varepsilon}_r$ и $\bar{\varepsilon}_c$ – взаимно перпендикулярны. Тогда абсолютное угловое ускорение:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_c^2 + \varepsilon_r^2 + \left(-\varepsilon_e\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9\pi^2}{2}\right)^2 + \pi^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{5 + 81\pi^2}\,. \tag{5.34}$$

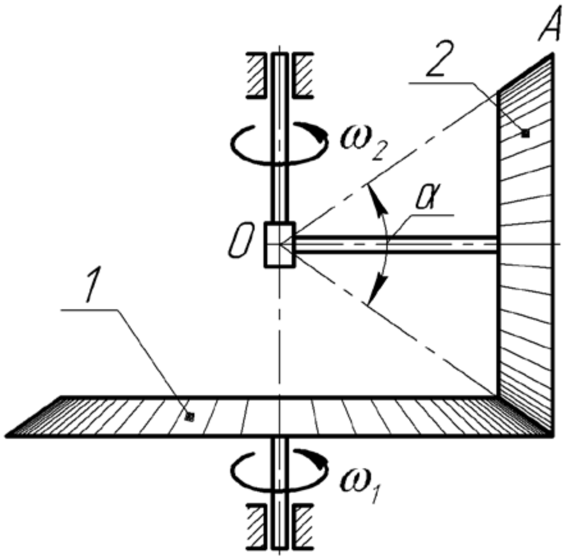

Рис. 5.8

Задача 5.3. Коническое зубчатое колесо *1* (рис. 5.8) радиусом *R* вращается с постоянной угловой скоростью ω_1. Шестерня *2* приводится в движение с помощью кривошипа, имеющего угловую скорость $\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1$ и то же направление вращения, что и колесо *1*. Определить абсолютную угловую скорость и абсолютное угловое ускорение шестерни *2*, а также скорость и ускорение точки *A*, если центральный угол шестерни $\alpha = 60°$, оси зубчатых колес пересекаются в точке *O*.

Решение:

1. Для шестерни угловая скорость кривошипа будет являться переносной скоростью, т.е. $\omega_e = \omega_2$. Вектор $\bar{\omega}_e$ будет направлен вдоль оси вращения кривошипа вверх (рис. 5.9, *а*).

Чтобы определить относительную угловую скорость, найдем МЦС шестерни при относительном движении. Скорости точек *B* и *C* будут равны:

$$\upsilon_B = \omega_e \cdot R = \frac{3}{2}\omega_1 R\,, \tag{5.35}$$

$$\upsilon_C = \omega_1 R\,. \tag{5.36}$$

Направление векторов этих скоростей показано на рис. 5.9, *б* (вид на шестерню справа). МЦС шестерни при относительном движении будет находиться в точке *P*, и можем записать:

$$\omega_r = \frac{\upsilon_B}{BP} = \frac{\upsilon_C}{CP}\,. \tag{5.37}$$

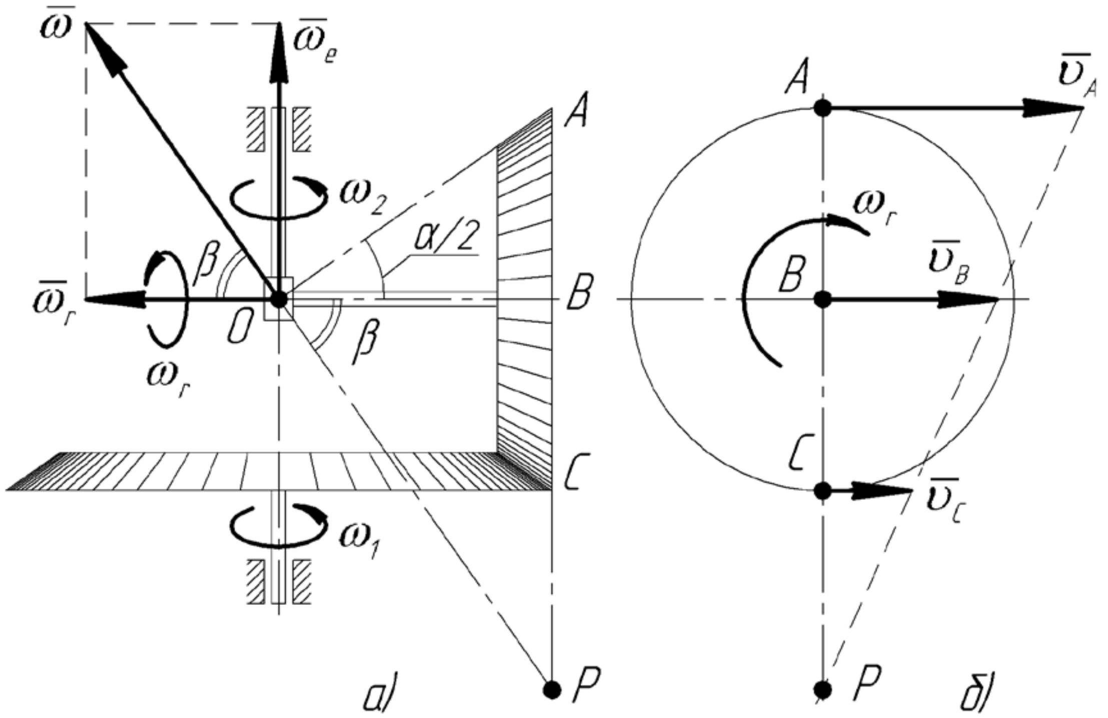

Рис. 5.9

Используя свойства пропорции, найдем относительную угловую скорость шестерни:

$$\omega_r = \frac{\upsilon_B - \upsilon_C}{BP - CP} = \frac{\upsilon_B - \upsilon_C}{BC}. \tag{5.38}$$

В прямоугольном треугольнике OBC (рис. 5.9, *а*):

$$BC = OB\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = OB\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{R\sqrt{3}}{3}, \tag{5.39}$$

тогда

$$\omega_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1. \tag{5.40}$$

Вектор $\overline{\omega}_r$ направлен вдоль оси вращения шестерни. Т.к. векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$ взаимно перпендикулярно, то абсолютная угловая скорость шестерни равна:

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1\right)^2} = \sqrt{3}\omega_1. \tag{5.41}$$

Вектор $\overline{\omega}$ будет направлен вдоль мгновенной оси, проходящей через точку O пересечения осей колес и точку P, которая является МЦС шестерни *2* при относительном движении.

2. Скорость точки A можем найти двумя способами.

а) Зная абсолютную угловую скорость шестерни:

$$\upsilon_A = \omega h, \tag{5.42}$$

где h – расстояние от точки A до мгновенной оси.

В прямоугольном треугольнике AOP (рис. 5.9, a):

$$\angle AOP = \frac{\alpha}{2} + \beta, \tag{5.43}$$

где β – угол между векторами $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}$.

Тогда

$$\beta = \arccos\frac{\omega_r}{\omega} = \arccos\frac{1}{2} = 60°, \tag{5.44}$$

$$\angle AOP = 30° + 60° = 90°, \tag{5.45}$$

$$h = OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \tag{5.46}$$

а скорость точки A:

$$\upsilon_A = \sqrt{3}\omega_1 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\omega_1 R. \tag{5.47}$$

б) Зная положение МЦС при относительном движении шестерни:

$$\omega_r = \frac{\upsilon_B}{BP} = \frac{\upsilon_A}{AP}, \tag{5.48}$$

или

$$\omega_r = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{AP - BP} = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{AB}, \tag{5.49}$$

откуда

$$\upsilon_A = \upsilon_B + \omega_r \cdot AB = \frac{3}{2}\omega_1 R + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} = 2\omega_1 R. \tag{5.50}$$

3. Абсолютное угловое ускорение шестерни:

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_r + \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_c. \tag{5.51}$$

Относительное $\overline{\varepsilon}_r$ и переносное $\overline{\varepsilon}_e$ угловые ускорения равны нулю, т.к. ω_r и ω_e постоянны. Тогда абсолютное угловое ускорение будет равно поворотному:

$$\varepsilon = \varepsilon_c = \omega_e \omega_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r\right) = \frac{3}{2}\omega_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 \cdot \sin 90° = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1^2. \tag{5.52}$$

Вектор $\overline{\varepsilon}$ будет направлен так же, как и вектор $\overline{\varepsilon}_c$ – перпендикулярно плоскости, проходящей через оси зубчатых колес (рис. 5.10, a).

4. Ускорение точки A найдем двумя способами.

а) Зная угловую скорость и угловое ускорение шестерни, найдем нормальное и касательное ускорения точки A:

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \left(\sqrt{3}\omega_1\right)^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\omega_1^2 R, \tag{5.53}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\omega_1^2 R. \tag{5.54}$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ будет направлен к точке O, а вектор $\bar{a}_A^\tau$ – перпендикулярно OA в сторону направления углового ускорения (рис. 5.10, *а*).

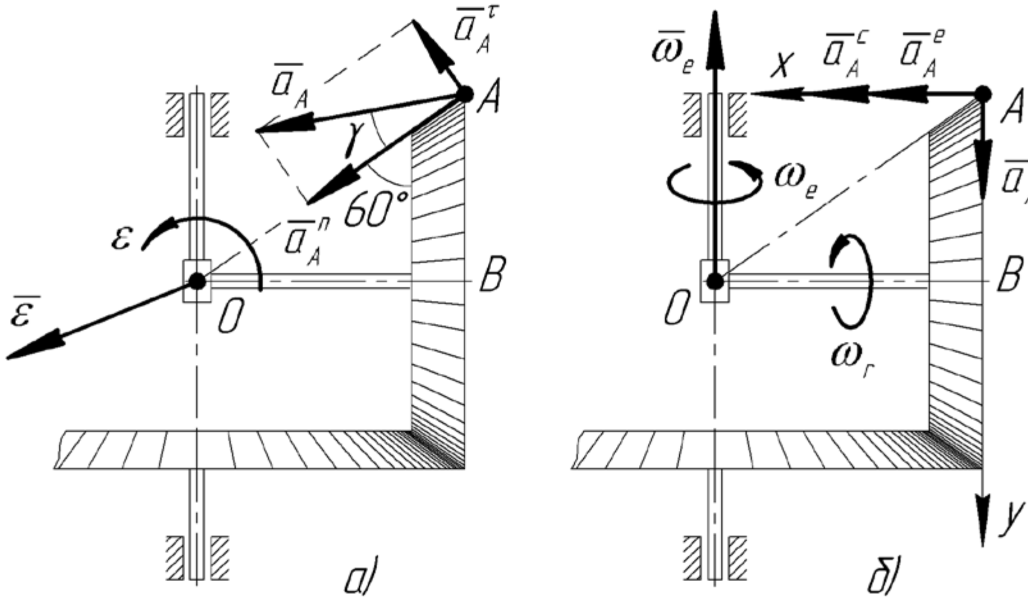

Рис. 5.10

Ускорение точки A:

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\omega_1^2 R\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\omega_1^2 R\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{2}\omega_1^2 R. \tag{5.55}$$

Вектор $\bar{a}_A$ будет находиться под углом γ к вектору $\bar{a}_A^n$:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arctg} 0,433 = 23,41°, \tag{5.56}$$

или под углом 83,41° к вертикали.

б) Рассматривая движение точки A как сложное, ее ускорение определим из теоремы Кориолиса:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^r + \bar{a}_A^e + \bar{a}_A^c. \tag{5.57}$$

Модули относительного и переносного ускорений будут соответственно равны:

$$a_A^r = \omega_r^2 \cdot AB = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1\right)^2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_1^2 R, \tag{5.58}$$

$$a_A^e = \omega_e^2 \cdot R = \left(\frac{3}{2}\omega_1\right)^2 \cdot R = \frac{9}{4}\omega_1^2 R. \tag{5.59}$$

Векторы этих ускорений будут направлены к оси соответствующего вращения: $\overline{a}_A^r$ – к оси относительного вращения, $\overline{a}_A^e$ – к оси переносного вращения (рис. 5.10, *б*).

Относительная скорость точки *A*:

$$\upsilon_A^r = \omega_r \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}\omega_1 R. \tag{5.60}$$

Направление вектора $\overline{\upsilon}_A^r$ будет совпадать с направлением вектора $\overline{\upsilon}_A$ на рис. 5.9, *б*.

Кориолисово ускорение:

$$a_A^c = 2\omega_e \cdot \upsilon_A^r \cdot \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_A^r\right) = 2 \cdot \frac{3}{2}\omega_1 \cdot \frac{1}{2}\omega_1 R \cdot \sin 90° = \frac{3}{2}\omega_1^2 R. \tag{5.61}$$

Направление вектора $\overline{a}_A^c$ определяем по правилу Жуковского (рис. 5.10, *б*).

Выбираем координатные оси и проектируем на них уравнение (5.57):

$$a_{Ax} = a_A^e + a_A^c = \frac{9}{4}\omega_1^2 R + \frac{3}{2}\omega_1^2 R = \frac{15}{4}\omega_1^2 R, \tag{5.62}$$

$$a_{Ay} = a_A^r = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_1^2 R. \tag{5.63}$$

Тогда ускорение точки *A*:

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\omega_1^2 R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_1^2 R\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{57}}{2}\omega_1^2 R \approx 3{,}77\omega_1^2 R. \tag{5.64}$$

Углы между вектором $\overline{a}_A$ и координатными осями составят:

$$\angle\left(\overline{a}_A, x\right) = \arccos\frac{a_{Ax}}{a_A} = \arccos\frac{15}{2\sqrt{57}} = \arccos 0{,}993 = 6{,}59°, \tag{5.65}$$

$$\angle\left(\overline{a}_A, y\right) = \arccos\frac{a_{Ay}}{a_A} = \arccos\frac{1}{2\sqrt{19}} = \arccos 0{,}115 = 83{,}41°. \tag{5.66}$$

Задача 5.4. Конический каток *1* с углом при вершине $\alpha = 60°$ катится без скольжения по конической поверхности *2* (рис. 5.11), вращающейся вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2$ (φ – в радианах). Скорость υ_A^r точки *A* катка по отношению к вращающейся поверхности *2* равна $2\ см/с$ и направлена так, как показано на рисунке; расстояние $OA = 16\ см$. Определить модуль и направление вектора абсолютной угловой скорости катка *1*, а также скорость принадлежащей ему точки *B* в момент времени $t = 1\ с$.

Решение:

Относительная угловая скорость катка *1*:

$$\omega_r = \frac{\upsilon_A^r}{AB}. \tag{5.67}$$

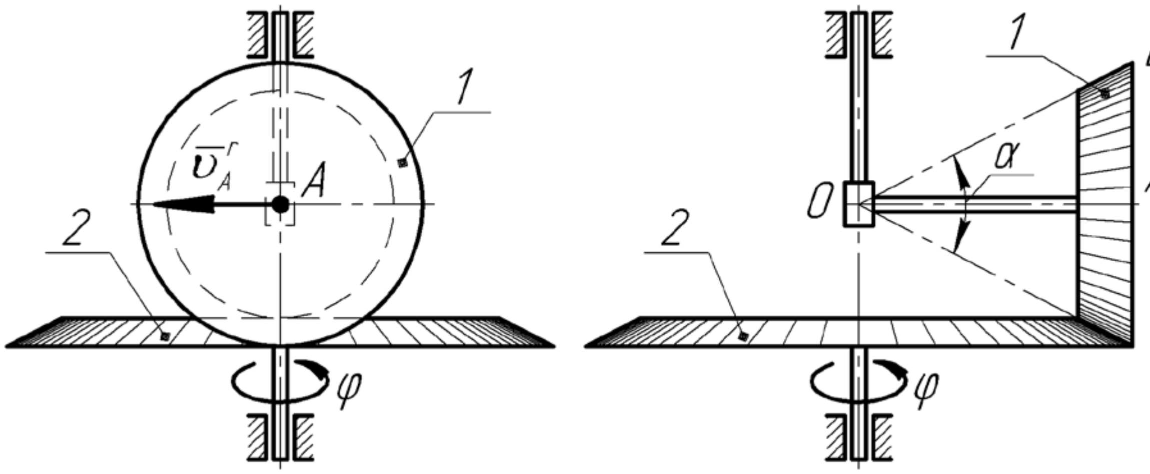

Рис. 5.11

Расстояние *AB* найдем из треугольника *OAB*:

$$AB = OA \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\ см, \tag{5.68}$$

тогда

$$\omega_r = \frac{2 \cdot 3}{16\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\ рад/с. \tag{5.69}$$

Угловая скорость вращающейся поверхности *2*:

$$\omega_2 = \dot{\varphi} = 4t, \tag{5.70}$$

и в момент времени $t = 1\ с$ составит $\omega_2 = 4\ рад/с$.

Найдем переносную угловую скорость катка.

Скорость точки *D* зацепления колес *1* и *2*:

$$\upsilon_D = \omega_2 \cdot OA = 4 \cdot 16 = 64\ см/с. \tag{5.71}$$

Направление вектора $\bar{\upsilon}_D$ показано на рис. 5.12, *а*.

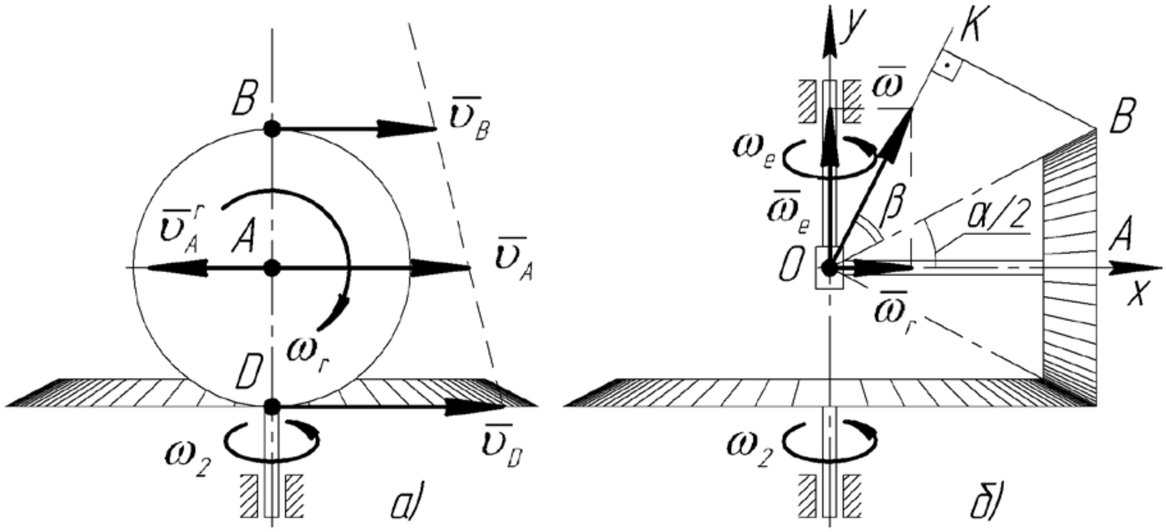

Рис. 5.12

Скорость точки D будет являться переносной скоростью точки A. С учетом того, что векторы $\overline{\upsilon}_D$ и $\overline{\upsilon}_A^r$ параллельны и противоположно направлены, а по модулю $\upsilon_D > \upsilon_A^r$, абсолютная скорость точки A будет равна:

$$\upsilon_A = \upsilon_A^e - \upsilon_A^r = \upsilon_D - \upsilon_A^r = 64 - 2 = 62 \ см/с. \tag{5.72}$$

Переносная угловая скорость катка:

$$\omega_e = \frac{\upsilon_A}{OA} = \frac{62}{16} = \frac{31}{8} \ рад/с. \tag{5.73}$$

Абсолютная угловая скорость катка:

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{31}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{964}}{8} = \frac{\sqrt{241}}{4} \ рад/с. \tag{5.74}$$

Направление вектора $\overline{\omega}$ показано на рис. 5.12, *б*. Проведем координатные оси и найдем направляющие косинусы:

$$\cos(\overline{\omega}, x) = \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\sqrt{3}/8}{\sqrt{241}/4} = \sqrt{\frac{3}{964}} = 0,056, \tag{5.75}$$

$$\cos(\overline{\omega}, y) = \frac{\omega_e}{\omega} = \frac{31/8}{\sqrt{241}/4} = \frac{31}{\sqrt{964}} = 0,998. \tag{5.76}$$

Вектор $\overline{\omega}$ будет находиться к осям координат под углами:

$$(\overline{\omega}, x) = \arccos 0,056 = 86,8°, \tag{5.77}$$

$$(\overline{\omega}, y) = \arccos 0,998 = 3,2°. \tag{5.78}$$

Скорость точки B найдем двумя способами.

а) Зная положение МЦС катка *1* при его относительном движении (МЦС – точка P – на рис. 5.12, *а* не показан), запишем:

$$\omega_r = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}, \tag{5.79}$$

откуда

$$\omega_r = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{AB}. \tag{5.80}$$

Тогда скорость точки *B*:

$$\upsilon_B = \upsilon_A - \omega_r \cdot AB = 62 - \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} = 60 \ \text{см/с}. \tag{5.81}$$

б) Зная абсолютную угловую скорость катка, скорость точки *B* найдем по формуле:

$$\upsilon_B = \omega \cdot BK, \tag{5.82}$$

где *BK* – расстояние от точки *B* до мгновенной оси (рис. 5.12, *б*).

В треугольнике *OBK*:

$$BK = OB \sin\beta, \tag{5.83}$$

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{16^2 + \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \ \text{см}, \tag{5.84}$$

$$\beta = (\bar{\omega}, x) - \frac{\alpha}{2} = 86{,}8^\circ - 30^\circ = 56{,}8^\circ, \tag{5.85}$$

$$BK = \frac{32\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 56{,}8^\circ = 15{,}46 \ \text{см}. \tag{5.86}$$

Тогда скорость точки *B*:

$$\upsilon_B = \frac{\sqrt{241}}{4} \cdot 15{,}46 = 60 \ \text{см/с}. \tag{5.87}$$

Задача 5.5. Прямой круговой конус *1* с радиусом основания $r = 2$ *см* катится без скольжения по неподвижному конусу *2* так, что его вершина *O* остается неподвижной, а центр основания *A* движется со скоростью $\upsilon_A = t$ *см/с* (рис. 5.13, *а*). Определить в момент времени $t = 2$ *с* скорость и ускорение точки *C* конуса *1*, если углы при вершине *O* обоих конусов одинаковы и равны 90°.

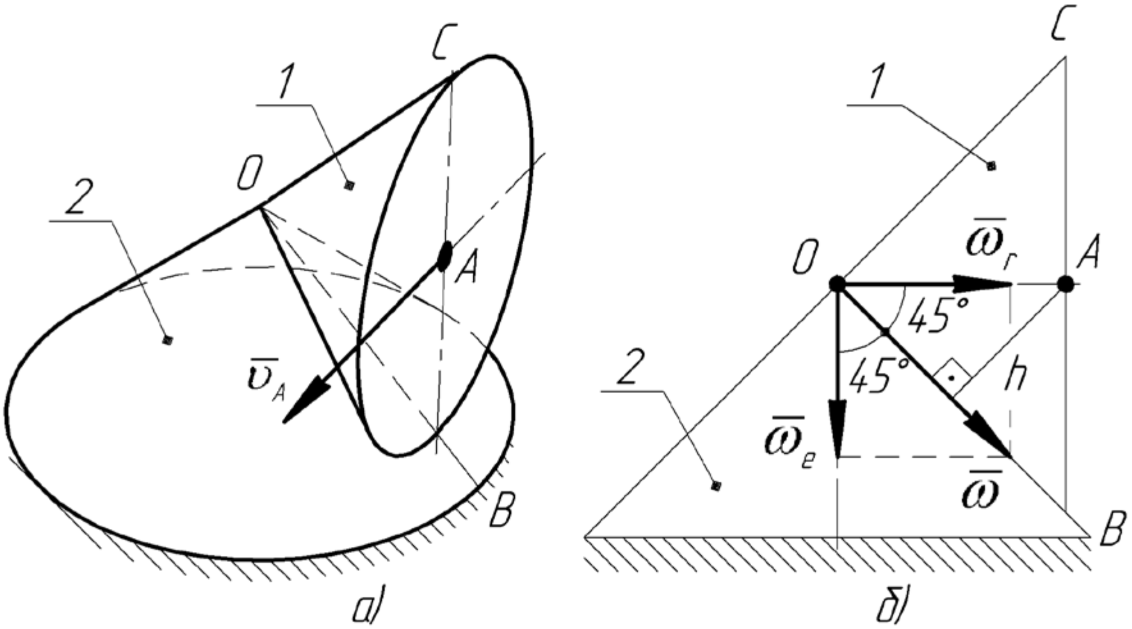

Рис. 5.13

Решение:

Подвижный конус катится по неподвижному без скольжения, поэтому его мгновенной осью является общая для конусов образующая *OB*. Вектор $\overline{\omega}$ абсолютной угловой скорости подвижного конуса будет направлен вдоль мгновенной оси (рис. 5.13, *б*), вектор $\overline{\omega}_e$ переносной угловой скорости – вдоль оси неподвижного конуса *2*, а вектор $\overline{\omega}_r$ относительной угловой скорости – вдоль оси подвижного конуса *1*.

Модуль абсолютной угловой скорости равен:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{h}, \tag{5.88}$$

где $h = r\cos 45°$ – расстояние от точки *A* до мгновенной оси *OB*.

Тогда:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{r\cos 45°} = \frac{t \cdot 2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} t \;\; рад/с. \tag{5.89}$$

Скорость точки *C*:

$$\upsilon_C = \omega \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{2} t \cdot 2r\cos 45° = 2t \;\; см/с, \tag{5.90}$$

и в момент времени $t = 2\ с$ составит $\upsilon_C = 4\ \ см/с$.

Модули переносной и относительной угловых скоростей будут равны между собой:

$$\omega_e = \omega_r = \omega\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{t}{2} \;\; рад/с. \tag{5.91}$$

Тогда переносное и относительное угловое ускорение:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_r = \dot{\omega}_e = \frac{1}{2} \ \text{рад}/c^2 . \qquad (5.92)$$

Направления векторов $\overline{\varepsilon}_e$ и $\overline{\varepsilon}_r$ будут совпадать с направлениями векторов $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$ (рис. 5.14).

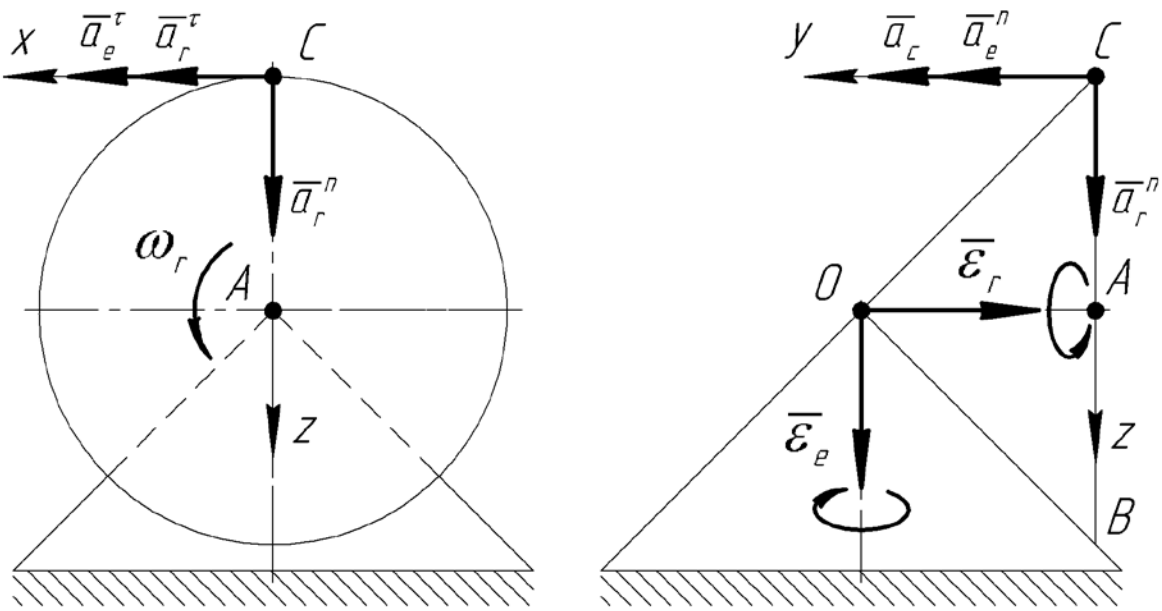

Рис. 5.14

Ускорение точки *C* найдем, рассматривая ее движение как сложное:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c . \qquad (5.93)$$

Нормальная и касательная составляющие переносного ускорения соответственно равны:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OA = \frac{t^2}{4} \cdot r , \qquad (5.94)$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OA = \frac{r}{2} . \qquad (5.95)$$

Нормальная и касательная составляющие относительного ускорения соответственно равны:

$$a_r^n = \omega_r^2 \cdot AC = \frac{t^2}{4} \cdot r , \qquad (5.96)$$

$$a_r^\tau = \varepsilon_r \cdot AC = \frac{r}{2} . \qquad (5.97)$$

В момент времени $t = 2 \ c$ значения этих ускорений составят:

$$a_e^n = a_r^n = 2 \ \text{см}/c^2 , \quad a_e^\tau = a_r^\tau = 1 \ \text{см}/c^2 . \qquad (5.98)$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 5.14.

Относительная скорость точки *C*:

$$\upsilon_r = \omega_r \cdot AB = \frac{t}{2} \cdot r . \qquad (5.99)$$

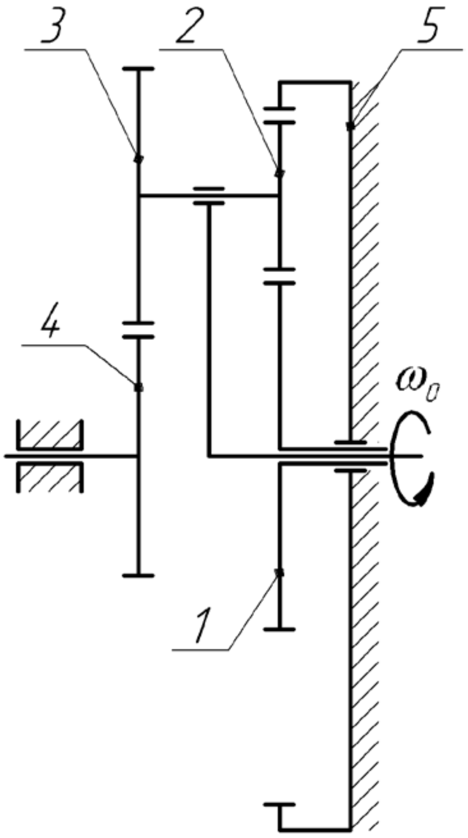

Рис. 5.15

При $t = 2\ c$ $\upsilon_r = 2\ см/c$, а вектор $\bar{\upsilon}_r$ будет совпадать по направлению с вектором $\bar{a}_r^\tau$.

Кориолисово ускорение:

$$a_c = 2\omega_e \upsilon_r \sin\left(\bar{\omega}_e, \bar{\upsilon}_r\right) = 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot 2 \cdot \sin 90° = 2t, \quad (5.100)$$

и при $t = 2\ c$ $a_c = 4\ см/c^2$.

Направление вектора $\bar{a}_c$ также показано на рис. 5.14.

Выбираем координатные оси и проектируем на них уравнение (5.93):

$$a_x = a_e^n + a_c = 6\ см/c^2, \quad (5.101)$$

$$a_y = a_e^\tau + a_r^\tau = 2\ см/c^2, \quad (5.102)$$

$$a_z = a_r^n = 2\ см/c^2. \quad (5.103)$$

Тогда ускорение точки *C*:

$$a_C = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{11} = 6,63\ см/c^2. \quad (5.104)$$

Задача 5.6. В планетарном редукторе водило имеет угловую скорость ω_0, а колесо *2* обкатывается по неподвижному колесу *5* (рис. 5.15). Найти угловые скорости зубчатых колес *1*, *2* и *4*. Радиусы колес *1*, *2* и *3* соответственно равны r_1, r_2 и r_3.

Решение:

Задачу решим двумя способами.

1. Метод остановки (метод Виллиса).

Сообщим водилу угловую скорость $-\omega_0$, т.е. равную по модулю угловой скорости водила, но противоположную по направлению. Тогда водило будет неподвижно, а передачу можем рассматривать как рядовую.

Значения угловых скоростей зубчатых колес редуктора до остановки и после указаны в таблице 5.1.

По формулам (5.13) и (5.14) передаточное число между колесами *2* и *5*:

$$i_{25} = \frac{\omega_2'}{\omega_5'} = \frac{r_5}{r_2}, \quad (5.105)$$

или

$$i_{25} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{-\omega_0} = \frac{r_5}{r_2}. \qquad (5.106)$$

Учитывая, что $r_5 = r_1 + 2r_2$, найдем угловую скорость колеса *2*:

$$\omega_2 = -\frac{\omega_0 \left(r_1 + r_2 \right)}{r_2}. \qquad (5.107)$$

Таблица 5.1 – Значения угловых скоростей колес до и после остановки водила

Номер колеса	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Угловая скорость до остановки водила ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	0
Угловая скорость после остановки водила ω'	$\omega_1 - \omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$	$\omega_4 - \omega_0$	$-\omega_0$

Таким образом, колесо *2* вращается в сторону, противоположную вращению водила.

Передаточное число между колесами *1* и *2*:

$$i_{12} = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{или} \quad i_{12} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = -\frac{r_1}{r_2}. \qquad (5.108)$$

Подставляя значение (5.107), найдем угловую скорость колеса *1*:

$$\omega_1 = \frac{2\omega_0 \left(r_1 + r_2 \right)}{r_1}. \qquad (5.109)$$

Вращение колеса *1* совпадает по направлению с вращением водила.

Передаточное число между колесами *3* и *4*:

$$i_{34} = \frac{\omega_3'}{\omega_4'} = \frac{r_4}{r_3}, \quad \text{или} \quad i_{34} = \frac{\omega_3 - \omega_0}{\omega_4 - \omega_0} = -\frac{r_4}{r_3}. \qquad (5.110)$$

Т.к. колеса *2* и *3* находятся на одной оси, то $\omega_3 = \omega_2$. Учитывая, что $r_4 = r_1 + r_2 - r_3$, найдем угловую скорость колеса *4*:

$$\omega_4 = \frac{\omega_0 \left(r_1 + r_2 \right)\left(r_2 + r_3 \right)}{r_2 \left(r_1 + r_2 - r_3 \right)}. \qquad (5.111)$$

Колесо *4* вращается в ту же сторону, что и водило.

2. Определение угловых скоростей с помощью МЦС.

Скорость точки *A*, принадлежащей оси колес *2* и *3*, равна:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot \left(r_1 + r_2 \right). \qquad (5.112)$$

МЦС колеса *2* будет находиться в точке его зацепления с неподвижным колесом *5* – в точке *P* (рис. 5.16).

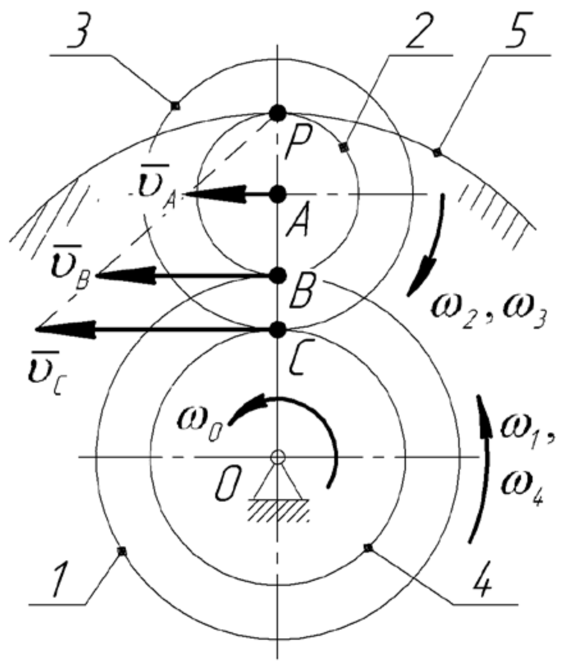

Рис. 5.16

Найдем скорость точки *B* зацепления колес *1* и *2*:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}, \tag{5.113}$$

$$\upsilon_B = 2\upsilon_A = 2\omega_0\left(r_1 + r_2\right). \tag{5.114}$$

Тогда угловая скорость колеса *1*:

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_B}{OB} = \frac{\upsilon_B}{r_1} = \frac{2\omega_0\left(r_1 + r_2\right)}{r_1}. \tag{5.115}$$

На рисунке видно, что направление вращение колеса *1* будет совпадать с направлением вращения водила.

Угловая скорость колеса *2*:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\omega_0\left(r_1 + r_2\right)}{r_2}. \tag{5.116}$$

Вращение колеса *2* противоположно вращению водила.

Т.к. угловые скорости колес *2* и *3* равны, то скорость точки *C* зацепления колес *3* и *4*:

$$\upsilon_C = \omega_3 \cdot CP = \omega_2 \cdot \left(r_2 + r_3\right) = \frac{\omega_0\left(r_1 + r_2\right)\left(r_2 + r_3\right)}{r_2}. \tag{5.117}$$

а угловая скорость колеса *4*:

$$\omega_4 = \frac{\upsilon_C}{OC} = \frac{\upsilon_C}{r_4} == \frac{\omega_0\left(r_1 + r_2\right)\left(r_2 + r_3\right)}{r_2\left(r_1 + r_2 - r_3\right)}. \tag{5.118}$$

Вращение колеса *4* совпадает с вращением водила.

Задача 5.7. Планетарный редуктор авиационного двигателя состоит из двух подвижных колес *1*, *2* и неподвижного колеса *3* (рис. 5.17). Число зубьев колес *1* и *3* составляет z_1 и z_3 соответственно. Определить отношение частоты вращения винта к частоте вращения колеса *1*.

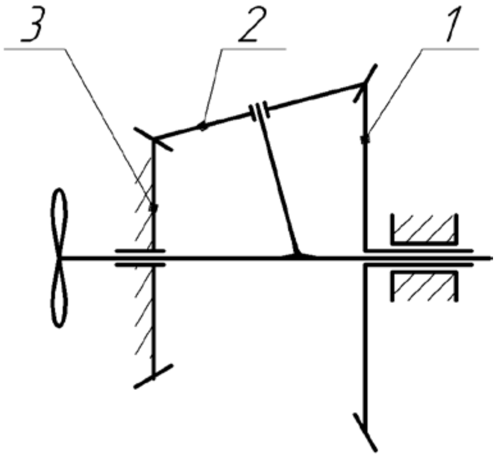

Рис. 5.17

Решение:

Решим задачу методом остановки (метод Виллиса). Обозначим частоту вращения винта до остановки $n_в$, а частоту вращения колеса *1* до остановки – n_1. Т.к. колесо *3* неподвижно, то $n_3 = 0$. После остановки вала винта:

$$n'_в = 0, \quad n'_1 = n_1 - n_в, \quad n'_3 = -n_в. \tag{5.119}$$

Передаточное число планетарного редуктора по формулам (5.13) и (5.14):

$$i_{13} = \frac{n'_3}{n'_1} = (-1)^2 \cdot \frac{z_1}{z_3}, \quad \text{или} \quad i_{13} = \frac{-n_в}{n_1 - n_в} = \frac{z_1}{z_3}. \tag{5.120}$$

Отсюда:

$$(n_в - n_1) \cdot z_1 = n_в \cdot z_3. \tag{5.121}$$

Тогда отношение частоты вращения вала винта к частоте вращения колеса *1* составит:

$$\frac{n_в}{n_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_3}. \tag{5.122}$$

Задача 5.8. В дифференциальной передаче (рис. 5.18) водило и колесо *1* вращаются в одну сторону с частотой n_0 и n_1 (об/мин) соответственно. Сколько оборотов в минуту делает колесо *3*, если радиусы колес *2* и *3* равны: $r_2 = 0{,}05\,м$, $r_3 = 0{,}1\,м$?

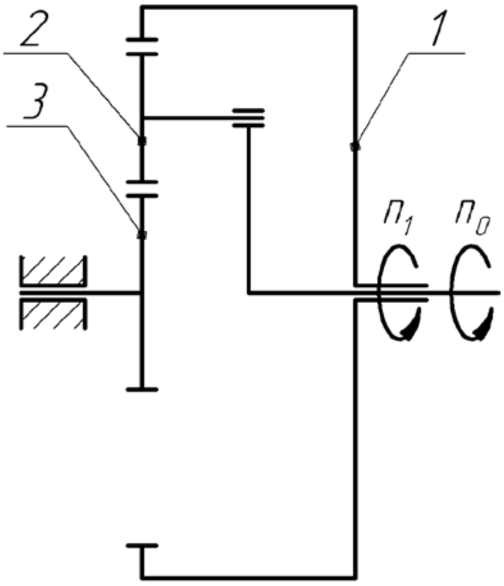

Рис. 5.18

Решение:

Задачу решим двумя методами.

1. Метод остановки (метод Виллиса).

Сообщим водилу вращение с частотой $-n_0$. Тогда водило будет неподвижно, а передачу можем рассматривать как рядовую.

Значения частот вращения зубчатых колес редуктора до остановки и после указаны в таблице 5.2.

По формулам (5.13) и (5.14) передаточное число редуктора:

$$i = \frac{n}{n}$$

или

$$i = \frac{n_1}{n_3}$$

Таблица 5.2 – Значения угловых скоростей колес до и после остановки водила

Номер колеса	*1*	*2*	*3*
Частота вращения до остановки водила n	n_1	n_2	n_3
Частота вращения после остановки водила n'	$n_1 - n_0$	$n_2 - n_0$	$n_3 - n_0$

откуда

$$n_3 = \frac{n_0\left(r_3 + r_1\right) - n_1 r_1}{r_3}. \quad (5.125)$$

Радиус колеса *1* равен:

$$r_1 = r_3 + 2r_2 = 0,1 + 2 \cdot 0,05 = 0,2\ м. \quad (5.126)$$

Окончательно угловая скорость колеса *3*:

$$n_3 = \frac{n_0 \cdot \left(0,1 + 0,2\right) - n_1 \cdot 0,2}{0,1} = 3n_0 - 2n_1. \quad (5.127)$$

Направление вращения колеса *3* совпадает с направлением вращения водила.

2. Определение угловой скорости с помощью МЦС.

Скорость точки *A*, принадлежащей оси колеса *2*, равна:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot \left(r_2 + r_3\right) = 0{,}15\omega_0. \tag{5.128}$$

Скорость точки *B* зацепления колес *2* и *3*:

$$\upsilon_B = \omega_1 \cdot r_1 = 0{,}2\omega_1. \tag{5.129}$$

Предположим, что $\upsilon_B > \upsilon_A$. Тогда МЦС колеса *2* будет находиться в точке в точке *P* (рис. 5.19).

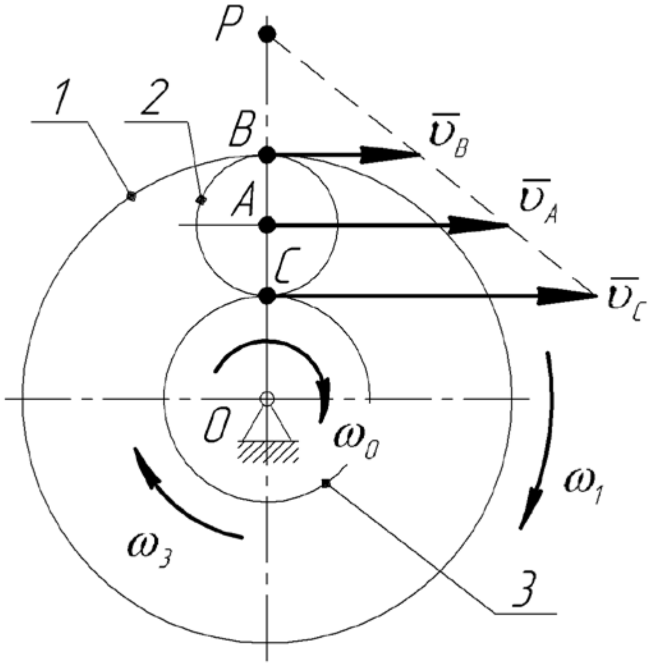

Рис. 5.19

Тогда можем составить пропорции:

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}, \tag{5.130}$$

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_C}{CP}. \tag{5.131}$$

Используя свойства пропорции:

$$\frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{AB} = \frac{\upsilon_C - \upsilon_A}{AC}, \tag{5.132}$$

или

$$\upsilon_A - \upsilon_B = \upsilon_C - \upsilon_A, \tag{5.133}$$

откуда

$$\upsilon_C = 2\upsilon_A - \upsilon_B = 0{,}3\omega_0 - 0{,}2\omega_1. \tag{5.134}$$

Тогда угловая скорость колеса *3*:

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_C}{r_3} = \frac{0{,}3\omega_0 - 0{,}2\omega_1}{0{,}1} = 3\omega_0 - 2\omega_1. \tag{5.135}$$

Данное выражение аналогично найденной выше зависимости (5.127).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Белов М. И. Теоретическая механика / М. И. Белов, Б. В. Пылаев. – 2-е изд. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1048445 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

2. Теоретическая механика: практикум / Т. А. Валькова, А. Е. Митяев, С. Г. Докшанин [и др.]. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2020. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1830740 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

3. Кирсанов М.Н. Решения задач по теоретической механике: учебное пособие. – 2-е изд., доп. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1102072 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

СОДЕРЖАНИЕ